

unter Beurlaubung von seiner Professur. In U.S.A. kam er bald an das Optical-Research-Laboratory der Universität Boston, Mass., an der er von 1948 an auch Vorlesungen hielt, ohne daß ihn diese Tätigkeit befriedigte. Ende 1949 konnte er den Vertrag mit der U.S. Air-Force lösen und an die Technische Hochschule München zurückkehren. — In den seitdem verflossenen 4 Jahren hat er den Wiederaufbau des physikalischen Institutes trotz der bestehenden Schwierigkeiten durchgeführt und in ihm neue Arbeitsgebiete, z. B. Massenspektroskopie und Metalloptik bei tiefsten Temperaturen aufgegriffen. Auch an den Vorarbeiten für die Aufstellung eines Atommeilers in Deutschland ist er beteiligt. Daneben widmete er sehr viel Mühe und Arbeit dem Deutschen Museum, dem er als Vorstandsmit-

glied angehört. Auch in der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, zu der er als Mitglied wie zur Göttinger Akademie der Wissenschaften gehört, sowie in der Bayer. Physikalischen Gesellschaft (zur Zeit als Vorsitzender) hat er sich in der ihm eigenen überaus leberdigen Art intensiv betätigt. — Da er seine Gesundheit um die es eine zeitlang schlecht stand, dank der hohen Kunst der Chirurgen wiedererlangte und ein volles Familienglück genießt — sein zweitältester Sohn wandte in seinen Fußstapfen und hat sein Physikstudium beendet —, sind alle Voraussetzungen dafür gegeben, daß das nächste Jahrzehnt für ihn in wissenschaftlicher und persönlicher Beziehung ein erfolgreicher und glücklicher wird. Möge ihm dieser Gedanke stets innere Zuversicht geben.

W. Meißner.

Ergebnisse der Tieftemperaturforschung XII. Schmelzwärme des Cäsiums [1]*.

Von KLAUS CLUSIUS und HARALD STERN, Zürich.

Mit 1 Textabbildung.

(Eingegangen am 20. Januar 1954.)

BIDWELL fand 1924 bei der Untersuchung der Temperaturabhängigkeit der Thermokraft von Cäsium gegen Platin einen deutlichen Knick bei -80°C [2]. Er schloß daraus auf einen Umwandlungspunkt. BRIDGMAN führte die Unstimmigkeit dagegen auf Verunreinigungen des Metalls zurück [3].

Da uns reine Cäsiumpräparate in größerer Menge zur Verfügung standen, griffen wir die Frage auf und untersuchten mit Hilfe von Abkühlungs- und Erwärmungskurven das Verhalten des metallischen Cäsiums bis -263°C hinab. Im ganzen Temperaturbereich wurde keine Anomalie gefunden, die auf eine Umwandlung hindeutete. Wir benutzten die Gelegenheit, um die Schmelzwärme des Cäsiums zu messen, worüber hier berichtet wird.

Ausgangsmaterial.

Das an der Luft entzündliche Cäsium wurde durch Zersetzen von Cäsiumazid in einer geschlossenen Vakuumapparatur erhalten [4].

Atomgewichtsreiner Cäsiumalaun [5] wurde in der 12fachen Gewichtsmenge siedenden Wassers gelöst und portionsweise mit der gleichen Gewichtsmenge reinen Bariumkarbonats gefällt. Die Lösung schäumte wegen des entweichenden Kohlendioxids kräftig und begann erst zu stoßen, als die Umsetzung beendet war. Der $\text{BaSO}_4\text{--BaCO}_3\text{--Al(OH)}_3$ -Niederschlag setzte sich gut ab und konnte leicht klar abgesaugt werden, was diese Art der Aufarbeitung des Alauns recht empfehlenswert macht. Das Filtrat enthält noch Al^{+++} - und SO_4^{--} -Ionen. Durch mehrstündiges Einleiten von Kohlendioxid wurde das restliche Aluminium in der Kälte als gut absitzendes Hydroxyd quantitativ gefällt. Aus dem mit Salpetersäure neutralisierten Filtrat kristallisierte schon das 1. Mal praktisch sulfatfreies Cäsiumnitrat, da es bei Zimmertemperatur etwa 10mal schwerer löslich als Cäsiumsulfat ist; bei der 2. Kristallisation wurde es völlig sulfatfrei erhalten. Das Nitrat wurde mit der 4fachen Menge kristallisierter Oxalsäure verrieben und durch vorsichtiges Glühen im Platintiegel in das Karbonat übergeführt. Die filtrierte Karbonatlösung wurde schließlich mit eindestillierter Stickstoffwasserstoffsäure übersättigt und die Azidlösung zur Kristallisation gebracht.

Kalorimeter.

Das nach dem Prinzip von NERNST-EUCKEN arbeitende Kalorimeter besteht aus einem Stahlzylinder

von 18 mm Durchmesser bei 50 mm Länge und 0,2 mm Wandstärke. Innen befinden sich zur Beschleunigung des Temperatenausgleichs vier gelochte Querwände aus dünnem Stahlblech. In die Kalorimeterwand ist ein Gewinde zur Aufnahme des Konstantanheizdrahtes ($\sim 100\text{ Ohm}$) eingepreßt, der mit Japanlack und dünnem Seidenpapier gegen den außen aufgewickelten weichgeglühten Platindraht für die Temperaturmessung (0,05 mm, etwa 160 Ohm) isoliert ist. Für die Schmelzwärmemessungen wurde der Pt-Draht bei 0°C in Eis und bei $32,38_3^{\circ}\text{C}$, dem Schmelzpunkt von Natriumsulfatdecahydrat, geeicht. In den Deckel ist mit Silberlot ein 7 mm langes und 3 mm weites Röhrchen aus Chromeisen eingefügt, an das ein Glasrohr von 3,5 mm Außendurchmesser angeschmolzen ist. Es dient zum Einfüllen des flüssigen Cäsiums und wird darauf möglichst dicht am Chromeisen abgeschmolzen.

Das Kalorimeter ist in eine schon früher beschriebene Anordnung eingebaut [6], die zur Messung der Schmelzwärme in ein Wasserbad von 28°C getaucht wird.

Füllung des Kalorimeters.

Für die Ermittlung der Schmelzwärme muß die eingefüllte Cäsiummenge genau bekannt sein. Außer dem muß die Wärmekapazität des Kalorimeters samt Inhalt bei einigen Temperaturen unterhalb und oberhalb des Schmelzpunkts bestimmt werden. Heißt man das ganze System von etwa 2° unter dem Schmelzpunkt bis etwa 2° darüber auf, so erhält man nach Abzug des zuvor bestimmten Wärmehalts für den überstrichenen Temperaturbereich unter Berücksichtigung der Wärmeverluste unmittelbar den Energiebedarf für den isothermen Schmelzprozeß. Der Wärmehalt des leeren Kalorimeters braucht dabei nicht bekannt zu sein.

Die Darstellung und Einfüllung des Cäsiums geschah in der auf Abb. 1 gezeigten Anordnung, die im Institut von Herrn Dr. H. MOLLET entwickelt wurde. Das Stahlrohr Z enthielt etwa 35 g reines Cäsiumazid. Ein Übergangsstück aus Chromeisen war einerseits mit dem Stahlrohr verschweißt und andererseits an die Glasapparatur mit den Vorratsrohren V_1 und V_2 an-

* GEORG JOOS zum 60. Geburtstag gewidmet.

molzen. *A*, *B*, *C* sind Abschmelzstellen und *D* schneidet einen Drehpunkt, um den die ganze Anordnung in der Zeichenebene geschwenkt werden kann. Eine gewogene Normalschliffhülse, an deren einem Ende das gewogene Kalorimeter *K* angebracht ist. *Z*, *V*₁, *V*₂ und die Verbindungsrohre werden durch übergeschobene Öfen und „fliegende Schmelzen“ erwärmt werden.

zunächst wird das Azid bei 200° C im Vakuum geschmolzen und darauf reiner Stickstoff eingelassen. Beim weiteren Steigern der Temperatur bis auf 330° entleert sich Stickstoff, ohne daß das Salz zerstäubt, sondern beim Zerfall des Azids im Vakuum stets der Stickstoff entweicht. Nach beendeter Zersetzung wird die Temperatur auf 200° gesenkt, der Stickstoff abgepumpt und dann die Temperatur wieder gesteigert. Bei 250° wird das Cäsium nach *V*₁ abzudestillieren, von wo es nach dem Abschmelzen von *A* nach *V*₂ und schließlich von dort durch den Schliff in das Kalorimeter geleitet. Dabei wird der Glasteil durch eine Infrarotstrahlung etwas über dem Cs-Schmelzpunkt gehalten. Zuerst wird ein gefülltes Material gießt man nach dem Abschmelzen von *C* in die Tasche *R*, schmilzt das Kalorimeter ab und wiegt es samt dem gereinigten Schliff ab. Die Füllung betrug 19,779 g Cs.

Schmelzpunkt des Cäsiums.

Die Schmelztemperatur stimmt mit den Angaben anderer Beobachter gut überein, wie die folgende Zusammenstellung von Tabelle 1 zeigt. Dabei handelt es sich durchweg um durch Vakuumdestillation gereinigtes Metall:

Tabelle 1. Schmelztemperatur des Cäsiums.

Schmelztemp.	Autor
± 0,05°	A. GUNTZ u. W. BRONIEWSKI [7]
	E. RENGADE [8]
	J. H. DE BOER, J. BROOS u. H. EMMENS [9]
	E. RINCK [10]
± 0,1°	L. LOSANA [11]
	J. B. TAYLOR u. J. LANGMUIR [12]
± 0,17°	diese Arbeit

Andere, nichtangeführte Beobachter fanden unter verschiedenen Werten, die auf Verunreinigungen hindeuten. So teilte BIDWELL [2], der irrtümlich eine Schmelztemperatur bei Cäsium vermutete, eine Schmelztemperatur von 27,4° mit, die sicher erheblich zu hoch ist.

Schmelzwärme des Cäsiums.

In Tabelle 2 sind die Ergebnisse von 4 Versuchen angegeben, die miteinander gut übereinstimmen. Aus ihnen ergibt sich die Schmelzwärme des Cäsiums zu

$$520,1 \pm 1,0 \text{ cal/gAtom.}$$

Tabelle 2. Schmelzwärme des Cäsiums.
(Gemessen an 19,779 g Cs, entsprechend 0,1488 Gramm-Atomen.)

Versuch	1	2	3	4
Schmelztemperatur T° abs	299,38	299,75	297,69	299,26
Schmelztemperatur T° abs	303,80	302,95	305,05	302,82
Zeit in sec	1220,1	1164,2	1134,1	933,5
Verbrauchte Energie in cal	91,775	87,562	100,877	88,854
Verbrauchte Energie zum Kalorimeter + Schliff (graph.)	14,240	10,293	23,494	11,427
Verbrauch zum Schmelzen cal	77,535	77,269	77,383	77,427
Schmelzwärme in $\frac{\text{cal}}{\text{gAtom}}$	521,0	519,2	520,0	520,3

Es ist dies der höchste Wert, der bisher für dieses Metall beobachtet worden ist, wie folgende Zusammenstellung zeigt:

		Methode
ECKARDT u. GRAEFE [13]	495,4 cal	Eiskalorimeter
RENGADE [8]	500,2 „	Eiskalorimeter
BRIDGMAN [3]	514 „	Aus der Schmelzdruckkurve
CLUSIUS u. STERN	520,1 „	Vakuumkalorimeter

Die aus unseren Werten folgende Schmelzentropie von 1,72₅ Clausius entspricht gut der der anderen Alkalimetalle, wie es die RICHARDSSche Regel verlangt.

In kritischer Hinsicht ist zu bemerken, daß das Eiskalorimeter zur Bestimmung der Schmelzwärme für den vorliegenden Fall an sich gut geeignet ist. Auch stimmen die Werte von ECKARDT-GRAEFE und RENGADE,

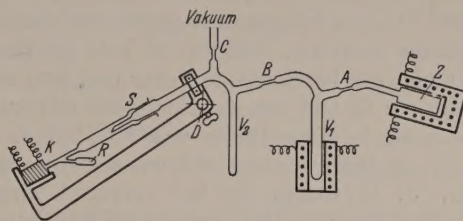


Abb. 1. Anordnung zur Darstellung und Füllung des Kalorimeters mit Cäsiummetall.

DE, der offenbar recht sorgfältig gearbeitet hat, auf 1% überein. Da die ersten Autoren keine Einzelheiten, besonders auch nicht das benutzte Quecksilbergewicht für 1 cal mitteilen, ist es allerdings schwierig festzustellen, wie weit die Übereinstimmung zufälliger Natur ist. Dazu kommt, daß ECKARDT-GRAEFES Schmelztemperatur um mehr als 2° zu tief liegt. Bedenklicher ist es noch, daß die Atomwärme des festen Metalls zwischen 0° und 28,5° von ECKARDT-GRAEFE zu 6,41 cal/gAtom, von RENGADE im Mittel zu 7,46 cal/gAtom angegeben wird. Dabei findet der letztere Autor eine unerwartet große Temperaturabhängigkeit der Atomwärme dicht unterhalb des Schmelzpunkts, die nach unseren Messungen fehlt. BRIDGMANS Daten sind aus der thermischen Zustandsgleichung gewonnen; jedoch dürfte der von ihm extrapolierte Schmelzpunkt von 29,7° zu hoch sein. Die Methode des Vakuumkalorimeters schließlich hat den Vorzug, daß sie von systematischen Fehlern leicht frei gehalten werden kann. Indessen scheint es nicht unmöglich, daß bei einem von der Oberfläche her geheizten Kalorimeter ein gewisser Energieverlust durch Strahlung stattfindet, durch den die Schmelzwärme etwas zu hoch gefunden wird.

Zusammenfassung.

In einem Vakuumkalorimeter wird die Schmelzwärme des Cäsiums zu $520,1 \pm 1,0 \text{ cal/gAtom}$ gefunden und mit den Literaturwerten verglichen.

Literatur. [1] Ergebnisse der Tieftemperaturforschung XI. Eine Anlage zur Verflüssigung von Wasserstoff technischer Reinheit. Z. Naturforschg. 8a, 479 (1953). — [2] BIDWELL, C. C.: Phys. Rev. 23, 362 (1924). — [3] BRIDGMAN, P. W.: Phys. Rev. 27, 70 (1926). — [4] SUHRMANN, R. u. K. CLUSIUS: Z. anorg. Chem. 152, 52 (1926). — [5] CLUSIUS, K. u. H. STERN: Helv. Chim. Acta 33, 462 (1950). — [6] CLUSIUS, K. u. J. GOLDMANN:

Z. phys. Chem. (B) **31**, 256 (1936). — [7] GUNTZ, A. u. W. BRONIEWSKI: J. Chim. phys. **7**, 474 (1909). — [8] RENGADE, E.: C. r. **156**, 1898 (1913) und Bl. Soc. chim. **4** **15**, 145 (1914). — [9] BOER, J. H. DE, J. BROOS u. H. EMMENS: Z. anorg. Chem. **191**, 118 (1930). — [10] RINCK, E.: C. r. **199**, 1217 (1934). — [11] LOSANA, L.: Gazz. **65**, 855 (1935). —

[12] TAYLOR, J. B. u. J. LANGMUIR: Phys. Rev. **51**, (1937). — [13] ECKARDT u. GRAEFE: Z. anorg. Chem. **23**, (1900).

Prof. Dr.-Ing. KLAUS CLUSIUS und Dr. HARALD STI
Physikalisch-Chemisches Institut der Universität Zür

Über den Einfluß diskreter Energieverluste der Elektronen auf die Struktur der Röntgenstrahlisochromaten in der Nähe der kurzwelligen Grenze.

Von CHRISTIAN GERTHSEN und LUDWIG ALBERT, Karlsruhe*.

Mit 4 Textabbildungen.

(Eingegangen am 2. Januar 1954.)

P. OHLIN [1] hat gezeigt, daß die Röntgenstrahlisochromaten dicht oberhalb der durch das DUANE-HUNTSCHE Verschiebungsgesetz gegebenen Grenze eine Feinstruktur besitzen. Bis zu 10 Volt oberhalb der Grenze steigt die Isochrimate linear und sehr steil an, dann folgt ein Gebiet, wo die Intensität mit wachsender Spannung in einer Breite von 8–15 Volt wieder abnimmt, um dann weniger steil wie am Anfang anzuwachsen. J. LINDHARD [2] hat versucht, einen Zusammenhang zwischen der Lage dieses Minimums und

von Å. NILSSON u. P. OHLIN [5] erfassen den Bereich um 3700 V.) Die Intensitätsmessung erfolgte mit einem Auslösezählrohr. Die Röhrenspannung wurde ein

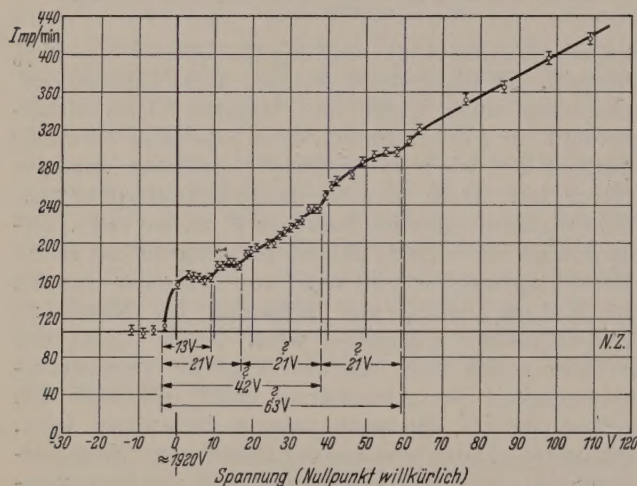


Abb. 1. Isochrimate einer Platin-Antikathode.

den erlaubten bzw. verbotenen Zonen im Energiespektrum der Elektronen im periodischen Potentialfeld des Gitters des Antikathodenmaterials aufzufinden. G. RUTHEMANN [3] und G. MÖLLENSTEDT [4] haben mit hochauflösenden Geschwindigkeitsspektrometern den Nachweis von diskreten Energieverlusten an Elektronen bringen können, welche durch sehr dünne Metallfolien hindurchtreten. Sie werden im folgenden RUTHEMANNSCHE Energieverluste ΔU_R genannt.

Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, einen Zusammenhang zwischen diesen diskreten Energieverlusten und der Struktur der Isochromaten in der Nähe der Grenze aufzufinden.

Die Messungen wurden mit einem hochauflösenden Vakuumröntgenspektrometer mit gebogenem Glimmerkristall durchgeführt. Da die diskreten Energieverluste klein sind, nämlich zwischen 10 und 30 eV liegen, wurde auch eine möglichst niedrige Grenzspannung U_0 gewählt; die unten mitgeteilten Messungen sind bei $U_0 \approx 1900$ V ausgeführt. (Neuere Versuche

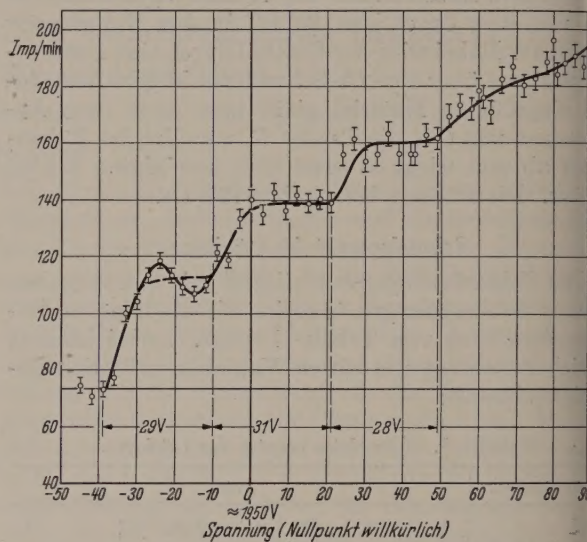


Abb. 2. Isochrimate einer Wolfram-Antikathode.

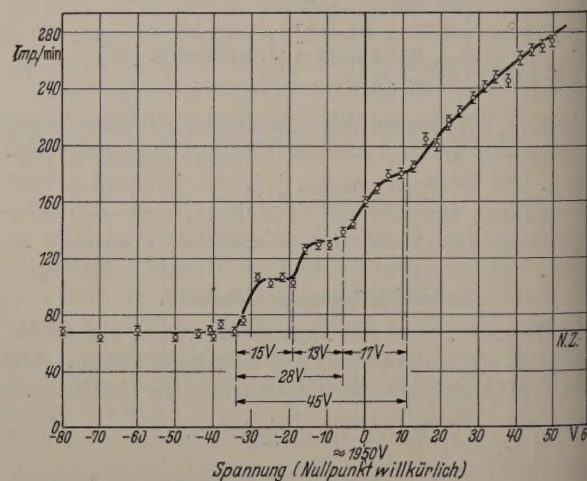


Abb. 3. Isochrimate einer Gold-Antikathode.

regelbaren Transformator entnommen, sie wurden gleichgerichtet, durch Siebglieder weitgehend geglättet und photoelektrisch stabilisiert. Bei einem Emissionsstrom von 3 mA in der Röhre ließ sie sich auf $\pm 1,5$ V konstant halten. Diese Hochspannung wurde vor der Aufnahme einer Isochrimate auf einen festen Wert eingestellt, der ungefähr der durch den eingestellten Glanzwinkel von etwa 20° und der Gitterkonstante des Glimmers (9,93 Å) gegebenen kurzwelligen Gren

* Herrn Prof. Dr. GEORG JOOS zum 60. Geburtstag gewidmet.

sprach, und wurde während der Messung durch Umschalten einer Anodenbatterie in kleinen Schritten von 1,5 bzw. 3 Volt verändert.

Die spektrale Breite der in das Zählrohr eintretenden Röntgenstrahlung beträgt 2 Volt, der mit einem EOD-Manometer gemessene Druck in Röhre und Manometer war stets kleiner als 10^{-5} Torr.

In den Abb. 1—3 sind Isochromaten aus Wolfram-, Gold- und Platinantikathoden wiedergegeben. Sie zeigen eine treppenartige Struktur. Die Breite der Stufen ist für das Antikathodenmaterial charakteristisch, innerhalb der Fehlergrenzen stimmt sie mit den von MÖLLENSTEDT gemessenen diskreten Energieverlusten der Kathodenstrahlen im Geschwindigkeitsbereich von 25—40 kV überein. Für Wolfram liegen keine Messungen der diskreten ΔU_R vor. Mit wachsender Spannung werden die Stufen unschärfer, so daß die von MÖLLENSTEDT beobachteten Energieverluste 60 eV bei Gold und 46 bzw. 62 eV bei Platin sehr undeutlich oder gar nicht mehr zu erkennen sind. Besonders markant erscheinen die Stufen mit wachsender Breite von etwa 30 Volt beim Wolfram.

Vergleichen wir die hier mitgeteilten Isochromaten mit den von OHLIN aufgenommenen Isochromaten, so sieht man hier den steilen Anstieg an der Grenzspannung, der dann folgende Abnahme mit wachsender Spannung findet sich weniger ausgeprägt. Bei manchen unserer Isochromaten, wie z. B. bei Wolfram, ist dies immer beobachtet. Die RUTHEMANNSchen diskreten Energieverluste lassen sich aber in den OHLINschen Isochromaten nicht nachweisen. Diese wurden durchweg nur bis 30—40 Volt oberhalb der Grenzspannung gemessen.

Bemerkenswert ist, daß sich in einer von DU MOND und LELAND [6] veröffentlichten Isochromaten, die von einer Grenzspannung 9,65 kV aus zu höheren Spannungen aufgenommen wurde, die für Wolfram charakteristischen Stufen andeuten.

Damit die Stufen sich deutlich ausbilden, muß die Antikathodenoberfläche extrem sauber sein. Auf einer Antikathode (überhaupt auf von Elektronen betroffenen Metallflächen) bilden sich immer dünne Schichten von Verunreinigungen, z. B. Zersetzungserzeugnissen der Dämpfe von Fetten und Kitten, die man nur fernhalten kann, wenn die bombardierte Oberfläche auf Temperaturen oberhalb 300°C gehalten wird. Wir verwendeten Antikathoden aus dünnen Schichten, die durch den Emissionsstrom auf Rotglut erhitzt werden. Bei Benutzung einer Wolframantikathode genügt bereits ein Niederschlag von verdampftem Wolfram auf einer Gold- oder Platinantikathode, der so dünn ist, daß er noch keine Interferenzerscheinungen zeigt, um in den Isochromaten nur noch die für Wolfram charakteristischen Stufen zu finden. Durch Verwendung einer Oxydkathode konnte die Beschädigung mit einer störenden Wolframschicht verhindert werden.

Zur Deutung des treppenförmigen Aufbaus der Isochromaten machen wir folgende Annahmen, die nur eine idealisierende Vereinfachung bedeuten.

1. Für die Energieverzerrung der in die Antikathode eindringenden Elektronen kommen nur diskrete RUTHEMANNSche Energieverluste in Frage. Wir betrachten den Fall, daß nur eine Energieabgabe vom Betrag ΔU_R vorkommt. Ob es sich um eine Energieabgabe auf ein gebundenes Elektron oder um eine Energieabgabe zur Anregung von Plasmaschwin-

gungen der Metallelektronen nach D. PINES und D. BOHM [7] handelt, interessiert in diesem Zusammenhang nicht.

Der Wirkungsquerschnitt für diese Prozesse ist noch nicht gemessen. W. LANG [8] hat beobachtet, daß Elektronen von 7,5 kV, welche durch 350 Å dicke Schichten von Aluminium ohne Streuung hindurchtreten, sechs aufeinander folgende unelastische Stöße erfahren haben können. Man kann daraus folgern, daß der Wirkungsquerschnitt Q_R für diese Energieverluste nicht um eine Größenordnung kleiner ist als die Ionisationsquerschnitte von Gasatomen durch Elektronen gleicher Geschwindigkeit. Neben dem diskreten besteht noch ein kontinuierliches Energieverlustspektrum, welches sich zu höheren ΔE -Werten erstreckt; je größer aber die Energieabgabe, desto seltener ist sie.

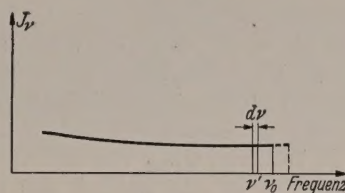


Abb. 4. Energiespektrum einer dünnen Antikathode.

Die Anregungswahrscheinlichkeit eines RUTHEMANNSchen Energieverlustes ΔU_R nimmt (ebenso wie die Ionisierungswahrscheinlichkeit) mit wachsender Energie des stoßenden Elektrons ab; für kleine Energieänderungen kann sie praktisch als konstant angenommen werden.

2. Die spektrale Intensitätsverteilung der Röntgenbremsstrahlung aus dünner Schicht, in der die Elektronen keine WHIDDINGTONSchen Geschwindigkeitsverluste erleiden, ist nach experimenteller Erfahrung sowohl als nach der von SOMMERFELD gegebenen Theorie von der Frequenz unabhängig, wie in Abb. 4 schematisch dargestellt. In unmittelbarer Nähe der Grenzfrequenz ist also nicht nur die Intensität je Frequenzbereich, sondern auch die Zahl der je Zeiteinheit emittierten Photonen konstant. Geringfügige Erhöhung der Energie der Elektronen verschiebt wohl die Grenzfrequenz zu höheren Werten, die Zahl der in den Frequenzbereich zwischen ν' und $\nu' + d\nu$ ausgestrahlten Photonen bleibt aber annähernd konstant.

Der Wirkungsquerschnitt Q_{Phot} für die Ausstrahlung eines Photons mit einer Frequenz in der Nähe der Grenzfrequenz ist aber außerordentlich klein. Die Ausbeute an Bremsstrahlung für Elektronen von 2 kV aus einer massiven Antikathode ist von der Größenordnung 10^{-4} . Der Wirkungsquerschnitt für die Photonenenergie ist also sicher um viele Größenordnungen kleiner, als der Wirkungsquerschnitt für die diskreten Energieverluste ΔU_R ; dieses ist aber die Voraussetzung für die Berechtigung der im folgenden mitgeteilten Deutung des treppenförmigen Aufbaus der beobachteten Isochromaten:

Wir lassen N_0 Elektronen mit einer Energie, die nur wenig größer ist als $e_0 \cdot U_0$, in die Antikathode einfallen. Sie behalten diese Energie, bis sie einen diskreten Energieverlust ΔU_R erleiden. Die Zahl Z der emittierten Photonen mit der Energie $\nu_0 h$ ist der Summe S der Wege proportional, die alle Elektronen bis zu ihrem 1. Energieverlust zurücklegen:

$$Z = a \cdot Q_{\text{Phot}} \cdot S,$$

In einer Schicht mit der Dicke dx in der Tiefe x erfahren $dN = n \cdot Q_R \cdot N \cdot dx$ Elektronen den Energieverlust ΔU_R , wo N die Anzahl der in der Tiefe x noch vorhandenen Elektronen ohne Energieverlust und n die Atomzahldichte ist. Dann ist

$$dN = n Q_R \cdot N_0 e^{-n Q_R x} \cdot dx$$

und die Summe ihrer Wege

$$dS = x \cdot dN = x n Q_R \cdot N_0 e^{-n Q_R x} \cdot dx.$$

Hieraus ergibt sich durch Integration von 0 bis ∞

$$S = \frac{N_0}{n \cdot Q_R} = N_0 \lambda_R,$$

wo λ_R die Bedeutung einer mittleren freien Weglänge hat. Nach dem Stoß ist die Energie eines jeden Elektrons zu klein, um die Frequenz ν_0 auszustrahlen. Daran ändert sich nichts, wenn die Volt-Geschwindigkeit der Elektronen bis an $(U_0 + \Delta U_R)$ eV heran gesteigert wird. Wegen der Unabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts Q_R von der Geschwindigkeit bleibt die Summe aller Elektronenwege konstant gleich S , und wegen der Unabhängigkeit von Q_{Phot} von der Geschwindigkeit bleibt daher auch die Zahl Z der emittierten Photonen mit der Frequenz ν_0 unverändert. Die Energiesteigerung reicht nicht aus, um den Elektronen nach ihrem unelastischen Stoß die Ausstrahlung der Frequenz ν_0 zu ermöglichen.

Erst wenn die Röhrenspannung größer als $U_0 + \Delta U_R$ wird, vermögen sie auch nach dem 1. unelastischen Stoß Photonen mit der Frequenz ν_0 zu erzeugen. Wegen der Unabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts Q_{Phot} von der Spannung in dem kleinen hier in Frage kommenden Bereich oberhalb U_0 ist die Zahl Z der emittierten Photonen bis zu den ersten unelastischen Stößen der Elektronen die gleiche geblieben. Die Summe aller Wege bis zu den 2. Stößen ist aber wieder $N_0 \lambda_R$. Also ist auch die Zahl der zwischen den 1. und 2. Stößen emittierten Photonen mit der Frequenz ν_0 gleich der Anzahl, die vor den 1. Stößen ausgestrahlt wurde. Nach Überschreiten von $U_0 + \Delta U_R$ muß sich also die Zahl der ausgestrahlten Photonen verdoppeln, und aus dem gleichen Grunde wie im Intervall der 1. Stufe bleibt nun die Photonenzahl bei Spannungssteigerung auf $U_0 + 2\Delta U_R$ konstant. Nach deren Überschreitung tritt eine 3. Stufe mit dreifacher Photonenzahl auf usw.¹.

Das hier entwickelte Bild ist natürlich zu einfach, und es sind Effekte zu berücksichtigen, die die bei

¹ Auf die Möglichkeit der Deutung einer treppenförmigen Isochromatenstruktur durch wiederholte Prozesse wurde von J. A. BEARDEN und G. SCHWARZ: Phys. Rev. **79**, 674 (1950) hingewiesen.

höheren Spannungen beobachtete Verwischung Stufen verursachen.

Schon oben wurde auf das Vorhandensein e kontinuierlichen Energieverlustspektrums hingewiesen, in dem größere Energieverluste enthalten sind. werden in erster Linie für die Ausglättung der höheren Stufen verantwortlich sein. Außerdem ist zu berücksichtigen, daß im allgemeinen mit dem unelastischen Stoß auch eine Streuung des Elektrons verbunden sein wird. Da die Intensität der Röntgenstrahlen dem Winkel abhängt, den sie mit der Bewegungsrichtung des Elektrons einschließen, muß also die größerer Eindringtiefe zunehmende Streuung Elektronen auch zu einer Verwischung der Stufen beitragen.

Die Aussage, daß der „Strahlungsweg“ nach jedem Stoß $S = N_0 \lambda_R$ ist, bedeutet natürlich nicht, daß je Elektron bis zum 1., 2., ... Energieverlust den gleichen Weg in der Antikathode zurücklegt. Vielmehr sind Eindringtiefen bis zum Energieverlust sehr verschieden, und diese Unterschiede werden um so größer je tiefer die Elektronen eindringen. Da bei unseren Messungen die Röntgenstrahlen sehr streifend gegen die Antikathodenoberfläche austreten, sind ihre Absorptionswege viel größer als die Wege der Elektronen bis zur Emission, so daß mit einer merklichen Schwächung für die höheren Stufen gerechnet werden muß. Aber weil die Emission in sehr verschiedenen Tiefen erfolgt, muß dieser Effekt auch zu einer Glättung der Treppenkurve beitragen.

Immerhin gelingt es mit einfachen Vorstellungen die Treppennatur der Isochromaten auf die diskreten Energieverluste zurückzuführen, und wir hoffen, durch Weiterführung der Versuche Aufschlüsse über die Wirkungsquerschnitte dieser unelastischen, quantenhaften Stöße der Elektronen im Metallgitter zu gewinnen.

Zusammenfassung.

Die Isochromaten zeigen einen treppenförmigen Aufbau, die in e-Volt gemessene Breite der Stufen stimmt mit den von RUTHEMANN, LANG und MÖLLENSTEDT gefundenen diskreten Energieverlusten überein.

Literatur. [1] OHLIN, P.: Arkiv för Mat., Astr. o. Fys. **29A**, No. 3 (1942). — [2] LINDHARD, J.: Arkiv för Mat., Astr. o. Fysik **31B**, No. 7 (1945). — [3] RUTHEMANN, C. Ann. Phys. (6) **2**, 113 (1948). — [4] MÖLLENSTEDT, G.: Optik **5**, 499 (1949). — [5] NILSSON, Å., u. P. OHLIN: Arkiv för Mat., Astr. o. Fysik **33A**, No. 23 (1947). — [6] DU MOND, u. V. BOLLMAN: Phys. Rev. **51**, 400 (1937). — [7] PINES, u. BOHM, D.: Phys. Rev. **85**, 338 (1952); PINES, D.: Phys. Rev. **92**, 626 (1953). — [8] LANG, W.: Optik **3**, 233 (1948).

Prof. Dr. CHRISTIAN GERTHSEN, Dipl.-Phys. LUDWIG ALBERT
Physikalisches Institut der TH Karlsruhe.

Anwendung intensiver Korpuskularbündel zur Anregung von Gasen*.

Von A. E. GRÜN, E. SCHOPPER und B. SCHUMACHER.

Mit 5 Textabbildungen.

(Eingegangen am 11. Januar 1954.)

Bei der Gasanregung in der gewöhnlichen Glimmentladung sind bekanntlich die Anregungsbedingungen und demzufolge auch die beobachteten Spektren an verschiedenen Stellen des Entladungsplasmas ver-

schieden. Man unterscheidet zwei typische Arten: das „positive“, in der positiven Säule angeregte Spektrum und das im negativen Glimmlicht auftretende „negative“ Spektrum. Der charakteristische Unterschied der Anregungsbedingungen der beiden Spektren ist folgender: Das positive Spektrum wird dann beob-

* Herrn Prof. G. Joos zum 60. Geburtstag gewidmet.

et, wenn die anregenden Elektronen im Gas durch — nicht zu starkes — elektrisches Feld *beschleunigt* werden; sie durchlaufen also das stationäre Energiespektrum der Plasma-Elektronen und damit auch die Anregungsfunktionen der einzelnen Zustände der Gasatome von kleinen Energien her. Daher beobachtet man im positiven Spektrum bevorzugt Übergänge von niedrigen Zuständen („milde“ Anregung). Im Gegensatz dazu wird das „negative“ Spektrum beobachtet, wenn die anregenden Elektronen Anfangsenergie ε_0 im Gas *abgebremst* werden, wie beispielsweise im negativen Glimmlicht der Fall ist. In diesem Fall die Elektronen die Anregungsfunktionen von hohen Energien her durchlaufen, werden im negativen Spektrum bevorzugt die höheren Zustände angeregt („starke“ Anregung). In der Glimmladung ist die Anfangsenergie ε_0 der Elektronen durch den Kathodenfall gegeben und demzufolge auf ca. 500 eV nach oben begrenzt.

Eine Möglichkeit, höhere Anfangsenergien der Elektronen zu erreichen, besteht darin, daß man ihre Erzeugung und Beschleunigung außerhalb des Gasraumes im Vakuum vornimmt und sie von dort aus in das Gas einschießt. Die Anwendung schneller Elektronen verlangt aber gleichzeitig im Interesse genügend lichtstarker Anregung eine hohe Teilchenstrahldichte, da die Anregungsquerschnitte mit steigender Elektronengeschwindigkeit schnell abnehmen. Die übliche Methode der Abtrennung des Vakuums vom Gasraum durch Folienfenster stößt bei erforderlichen Teilchenstromdichten auf Schwierigkeiten. Die zwischen Vakuum und Gasraum bestehende Druckdifferenz läßt sich jedoch unter Vermeidung auf Folienfenster über freie Öffnungen dynamisch recht erhalten, gegebenenfalls unter Verwendung von Zwischenkammern, aus denen das einströmende Gas abgepumpt wird. Entscheidend für die praktische Durchführbarkeit dieses schon länger bekannten Prinzips ist, wie B. SCHUMACHER [1], [2] gezeigt hat, die richtige Dimensionierung der Anordnung, insbesondere die Kammern verbindenden Öffnungen. Solche, die uns „dynamische Druckstufen“ genannte Anordnungen ließen mit erträglichem Aufwand an Pumpen die Öffnungen von einigen Zehntel Millimetern Durchmesser gegen Atmosphärendruck zu, mit ausreichender Sicherheit für den Durchtritt des optisch gebündelten Elektronenstrahls. Mit der technischen Weiterentwicklung dieses Verfahrens unter weitergehender Ausnutzung gasdynamischer Effekte [3] befaßt sich die W. C. Heraeus (Hanau).

Dieses Prinzip der Trennung des Gasraums vom Erzeugungssystem eines Korpuskularbündels durch dynamische Druckstufen erlaubt naturgemäß gleichzeitigen Einschuß von Ionenbündeln in Gase und besonders dort wertvoll, wo die Undurchlässigkeit von Folienfenster ihre Anwendung verbietet.

Im Zusammenhang mit einer Arbeit über die Anregung von Gasen durch schnelle Teilchen [4] hat E. GRÜN die Spektren verschiedener Gase bei Anregung durch schnelle Elektronen und Protonen untersucht. Hierbei haben sich zwei von B. SCHUMACHER entwickelte Druckstufenstrecken [1] in einer Betriebszeit von mehreren hundert Stunden als bequemes und zuverlässiges Hilfsmittel bewährt.

Abb. 1 zeigt die zur Anregung durch Elektronen verwendete Anordnung. Das mit einer Fernfokus-

Kathode erzeugte und auf 50 keV beschleunigte Elektronenbündel tritt mit einer Stromstärke der Größenordnung 0,5 mA durch eine freie Öffnung von 0,3 mm Durchmesser in das Gas ein, dessen Druck bis 1000 Torr betrug.

Abb. 2 zeigt ein zur Gasanregung verwendetes Ionenbündel von 600 keV und 10^{-7} A, bestehend aus Protonen und Wasserstoffmolekülionen, das in der 1,5 MeV-Beschleunigungsanlage unseres Laboratoriums erzeugt wurde.

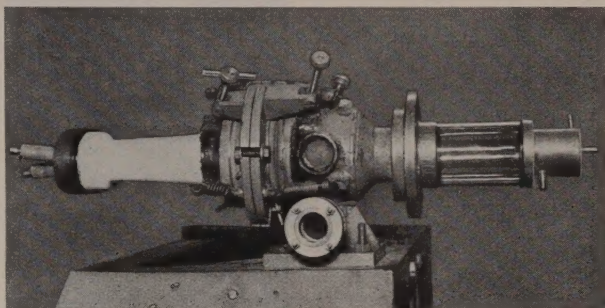


Abb. 1. Anordnung zur Anregung eines Gases durch ein Bündel schneller Elektronen. Der Isolator links enthält die Fernfokus-Kathode; durch die in der Mitte sichtbare Vorrichtung justierbar. Der Mittelteil enthält außerdem die Druckstufenstrecke. Im Quarzrohr rechts befindet sich das Gas.

Die so erhaltenen Spektren zeigen, wie zu erwarten, die charakteristischen Eigenschaften der negativen Spektren sehr ausgeprägt. Die Anregung höher liegender Zustände äußert sich spektroskopisch in relativ starken Funkenlinien bzw. -banden, sowie Linien von Dissoziationsprodukten. Die Dissoziationsprodukte

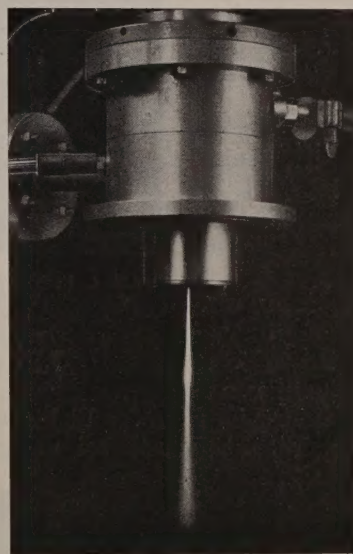


Abb. 2. 600 keV-Ionenbündel bestehend aus H^+ und H_2^+ -Ionen in Stickstoff. Einschuß durch freie Öffnung von 0,3 mm Durchmesser.

selbst machen sich zum Teil durch chemische Prozesse im Anregungsgefäß bemerkbar. Die Ergebnisse für verschiedene Gase, sowie Einzelheiten über den Anregungsmechanismus sind an anderer Stelle ausführlich dargestellt [4].

Gegenüber der Anregung im negativen Glimmlicht, Bogen und Funken zeichnet sich die beschriebene Art der Anregung vor allem dadurch aus, daß die Anregungsbedingungen besser definiert und quantitativ erfassbar sind:

Das beobachtete Spektrum ist unabhängig von speziellen Elektrodenanordnungen und -materialien, sowie in weiten Grenzen von der Stromdichte, der Art und Energie der anregenden Teilchen. Es hängt nur von der Gasart ab

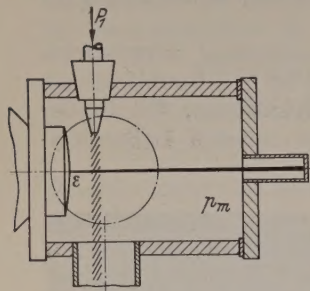


Abb. 3. Schematische Anordnung zur Beobachtung von Nachleuchterscheinungen durch Anregung eines Gasstrahls.

und kann daher in dieser Hinsicht als „Idealform“ des negativen Spektrums bezeichnet werden.

Die Stromdichte des anregenden Bündels ist gut definiert. So ist beispielsweise unter den oben genannten Betriebsbedingungen eine Anregung in zwei Schritten noch unwahrscheinlich, so daß die beobachteten Funkenlinien, und Linien von Dissoziationsprodukten, unmittelbar beim Elementarakt der Ionisation bzw. Dissoziation angeregt worden sein müssen.

Da der Gasraum praktisch feldfrei ist, haben energiearme Ionen keine Gelegenheit zur Energieaufnahme und Teilnahme am Anregungsprozeß.

Der Gaszustand wird durch die Anregung im Vergleich zum Bogen oder Funken nur wenig verändert; die Temperatur im Kern des Elektronenbündels an seiner Eintrittsstelle wurde bei unseren Unter-

suchungen spektroskopisch zu einigen hundert Grad abgeschätzt.

Die Intensität des anregenden Teilchenstromes der Gaszustand sind unabhängig voneinander beide frei wählbar.

Diese letztere Eigenschaft kann dazu benützt werden, die Wirkungsquerschnitte von Lösch- und Energieaustauschprozessen in Gasen zu bestimmen, indem Lichtausbeute in ihrer Abhängigkeit vom Gaszustand untersucht wird. In einer abgewandelten Form unter Verwendung eines radioaktiven Präparats Quelle schneller Teilchen — wurde dieses Meßprinzip zur quantitativen Untersuchung von Lösch- und Energieübertragungsprozessen in stickstoffhaltigen Gasen angewendet [5].

Eine weitere Eigenart der Anregung durch lokalisierte Teilchenbündel ist es, daß der Ort der Anregung im Gasraum eng begrenzt werden kann. Von dieser Möglichkeit wird in einer Anordnung Gebrauch gemacht, die in Abb. 3 dargestellt ist: Ein Gasstrahl von einigen hundert m/sec Geschwindigkeit, wie beispielsweise durch eine Lavaldüse erzeugt werden kann, durchkreuzt senkrecht ein Elektronenbündel von einigen Zehntel Millimetern Durchmesser. An der Kreuzungsstelle wird ein Teil des strömenden Gases in ein Plasma verwandelt; dies gibt Anlaß zu verschiedenen Nachleucht-Erscheinungen. Sie geben einen Einblick über den weiteren Verlauf des Gasstrahls (Abb. 4). Andererseits gestattet die Anordnung, den zeitlichen Verlauf von Abklingvorgängen im Plasma spektroskopisch zu untersuchen, der hierbei stationär als Ortsfunktion in Strahlrichtung auftritt. Im Beispiel der Abb. 5 ist das verschiedene rasche Abklingen der Emission von Funken- und Bogenbanden in Stickstoff zu erkennen.



Abb. 4. Nachleucht-Bild einer Argon-Stickstoff-Strömung aus einer Laval-Düse,
 $p_1 = 1 \text{ atm}$,
 $\varepsilon_0 = 50 \text{ keV}$,
 $p_m = 0,1 \text{ Torr}$.



Abb. 5. Ausschnitt aus dem Spektrum des Nachleuchtens in Stickstoff. Abbildung des Gasstrahls auf den parallel zur Strahlrichtung liegenden Spalt des Spektrographen.

Zusammenfassung.

Die Gasanregung durch Bündel schneller Teilchen bedeutet eine Erweiterung der bisher üblichen Anregungsverfahren. Sie zeichnet sich u. a. durch relativ gut definierte Anregungsbedingungen aus.

Unter Hinweis auf ein Verfahren zur Erzeugung intensiver Korpuskularbündel mit Hilfe dynamischer Druckstufen werden Anwendungsbeispiele gezeigt. Insbesondere gestattet die lokalisierte Anregung eines Gasstrahls durch ein intensives Korpuskularbündel im kleinen Querschnitt die stationäre Beobachtung von Abklingvorgängen im Plasma.

- Literatur.** [1] SCHUMACHER, B.: Optik 10, 116 (1953). [2] SCHOPPER, E. u. B. SCHUMACHER: Z. Naturforschg. 6, 601 (1951). — [3] SCHUMACHER, B.: Ann. Physik, (6), 13, 4 (1953). — [4] GRÜN, A. E.: Z. Naturforschg. 9a, 55 (1954). [5] GRÜN, A. E. u. E. SCHOPPER: Z. Naturforschg. 9a, 13 (1954).

Dr. A. E. GRÜN, Prof. Dr. E. SCHOPPER
und Dr. B. SCHUMACHER,

Hochspannungslaboratorium Hechingen (Abt. des Max Planck Instituts Weissenau)
und Phys. Institut der T. H. Stuttgart.

Die Lumineszenz von silberaktiviertem Steinsalz*.

Von WILHELM HANLE und HERMANN HINRICHS, Gießen.

Mit 5 Textabbildungen.

(Eingegangen am 11. Januar 1954.)

Im Zusammenhang mit Szintillationsbeobachtung wurde die Lumineszenz von NaCl mit dreierlei Gehalt bei Anregung durch energiereiche Strahlung untersucht. Beobachtet wurden das Momentanleuchten, die Phosphoreszenz, das Momentanleuchten während der Stimulation mit sichtbarem Licht, die Phosphoreszenz nach der Stimulation, die

zeugen, ist der Anstieg viel steiler und nur bei 7×10^{-9} Amp/cm² sichtbar (Abb. 2), bei 7×10^{-8} Amp/cm² unmeßbar kurz (Abb. 3). Bei 0,15% Ag ist

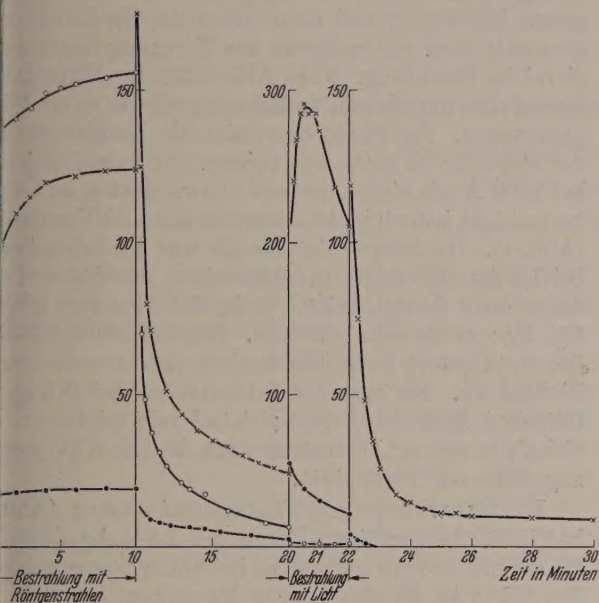


Abb. 1. Anregung von NaCl/Ag durch Röntgenstrahlen (6,5 r/min).
Bande bei 4000 Å.: Momentanintensität und Phosphoreszenz, Momentanintensität während der Stimulation durch grün-gelbes Licht und Phosphoreszenz nach der Stimulation.

○ 6% Ag × 1,5% Ag ● 0,1% Ag

ermolumineszenz, die Radiophotolumineszenz und Änderungen der Lumineszenzeigenschaften bei Störung durch Elektronen.

Bei Aktivierung mit Röntgenstrahlen setzt momentan, d. h. innerhalb der Einstelldauer des Instruments (~ 1 sec), Lumineszenz ein. Die Anfangsintensität des Momentanleuchtens ist durch die Lichtintensität der Szintillationen gegeben, welche von den einzelnen Röntgenquanten im Kristall erzeugten Elektronen ausgelöst werden. Die Lumineszenz besteht aus einer Bande bei etwa 2500 Å, die einem Übergang in ein Silberion entspricht, und einer etwas schwächeren Bande bei etwa 4000 Å, die einem Übergang in ein Doppelion zugeordnet wird [1]. Die Momentanintensität steigt im Laufe von 10–20 sec erst schnell, dann langsamer an (Abb. 1). Nach Abschalten der Röntgenstrahlung fällt sie momentan auf einen Bruchteil ab, gleich der Anfangsintensität der Phosphoreszenz, die bei Zimmertemperatur innerhalb von etwa 1 Stunde im wesentlichen abklingt. Die Momentanintensität ist proportional der Röntgenintensität, der Anstieg unabhängig von der Dosisleistung im Bereich 0,05–3,7 r/h [2].

Bei Anregung mit Elektronen, welche eine um mehrere Größenordnungen höhere Ionendichte erzeugen, ist der Anstieg viel steiler und nur bei 7×10^{-9} Amp/cm² sichtbar (Abb. 2), bei 7×10^{-8} Amp/cm² unmeßbar kurz (Abb. 3). Bei 0,15% Ag ist

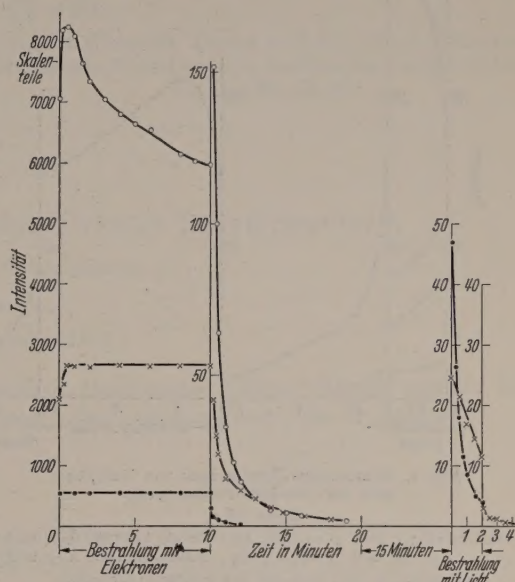


Abb. 2. Anregung von NaCl/Ag durch Elektronen (7×10^{-9} Amp/cm²; 50 kV).
Bande bei 4000 Å.: Momentanintensität und Phosphoreszenz, Momentanintensität während der Stimulation durch grün-gelbes Licht und Phosphoreszenz nach der Stimulation.

○ 6% Ag × 1,5% Ag ● 0,1% Ag

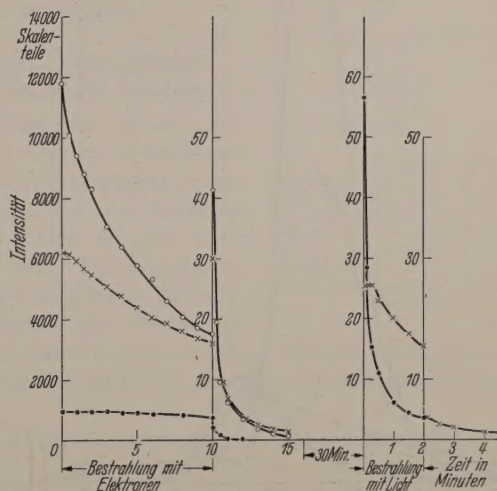


Abb. 3. Anregung von NaCl/Ag durch Elektronen (7×10^{-8} Amp/cm²; 50 kV).
Bande bei 4000 Å.: Momentanintensität und Phosphoreszenz, Momentanintensität während der Stimulation mit grün-gelbem Licht und Phosphoreszenz nach der Stimulation.

○ 6% Ag × 1,5% Ag ● 0,1% Ag

(Ordinate ist mit der in Abb. 2 nicht vergleichbar.)

der Anstieg schon bei 7×10^{-9} Amp/cm² unmeßbar schnell. Dies entspricht etwa 5×10^5 rep/min, bei 7×10^{-8} Amp/cm² 5×10^6 rep/min. Bei einer so hohen Dosis sind die Haftstellen sofort gesättigt. 7×10^{-9} Amp/cm² sind 4×10^{10} Elektronen/cm². Die Reichweite der Elektronen von 50 kV beträgt 4×10^{-3} cm. Bei einer Ionisierungsarbeit von 5 eV beträgt die Gesamtionisation 10^{17} /cm³ sec. Infolge der schnellen Sättigung der Haftstellen liegt die Anstiegs-

* Herrn Prof. Dr. G. Joos zum 60. Geburtstag.

zeit des Momentanleuchtens bei 10^{-7} Amp/cm² schon unterhalb 1 sec. Bei kleinerem Silbergehalt scheint die Sättigung schon früher einzusetzen, weil die Zahl der Fehlstellen kleiner ist. Die Momentanintensität wächst mit dem Silbergehalt. Bei starker Bestrahlung nimmt die Momentanintensität mit der Zeit infolge Zerstörung ab. Gleichzeitig verbreitert sich das Lu-

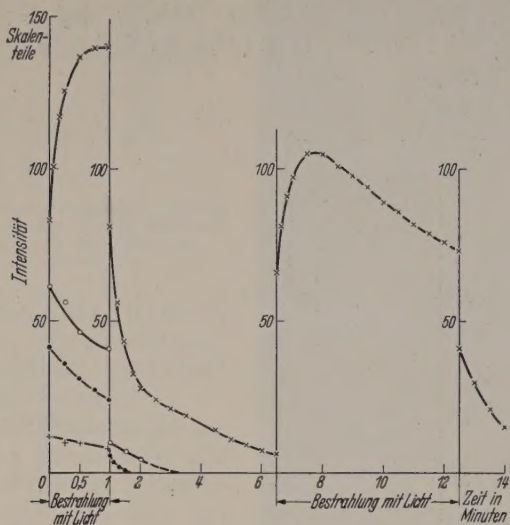


Abb. 4. Stimmulations-Lumineszenz von NaCl/Ag nach der Röntgenstrahlung.

Dosis 200 r

Konzentration: \times und $+$ = 1,5% Ag Bande bei 4000 Å \times und \bullet
 \circ und \circ = 0,1% Ag Bande bei 2500 Å $+$ und \circ
 Messung: $\frac{1}{2}$ Std. nach der Röntgenstrahlung.

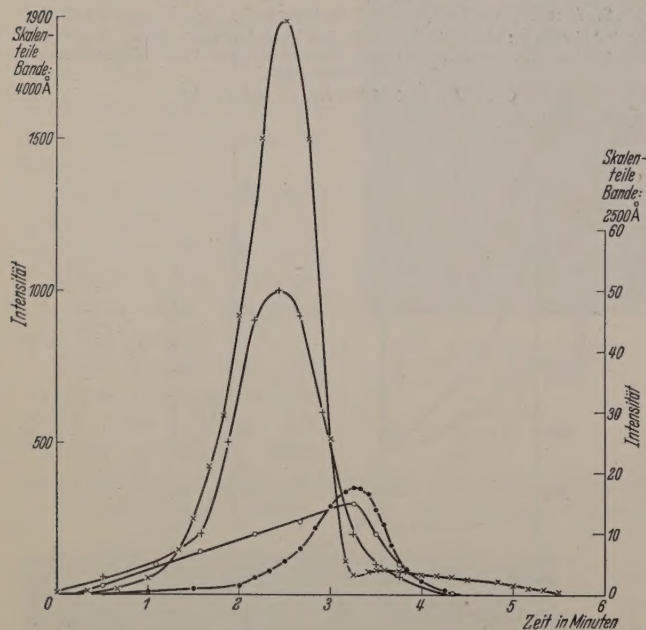


Abb. 5. Thermolumineszenz von NaCl/Ag nach der Röntgenstrahlung.

Dosis: 200 r

Konzentration: \times und $+$ = 1,5% Ag Bande bei 4000 Å \times und \bullet
 \circ und \circ = 0,1% Ag Bande bei 2500 Å $+$ und \circ
 Messung $\frac{1}{2}$ Std. nach der Röntgenstrahlung.

mineszenzspektrum nach langen Wellen. Zum einen werden offenbar neue Elektronenfänger geschaffen, von denen aus die Elektronen strahlungslos ins Valenzband übergehen. Zum anderen werden die Niveaus, bei deren Auffüllung aus dem Leitfähigkeitsband die beobachtete Lumineszenz auftritt, in ihrer Lage verändert.

Die Phosphoreszenz klingt sowohl bei Röntgen- wie bei Elektronenbestrahlung bei 6% Ag-Gehalt

schnell ab, bei 1,5% langsamer, bei 0,1% ist sie sehr schwach. Kristalle mit einem mittleren Ag-Gehalt speichern demnach am besten.

Läßt man die Phosphoreszenz eines durch Röntgenstrahlen oder Elektronen erregten NaCl/Ag-Kristalles abklingen und bestrahlt ihn dann mit Licht, so beobachtet man 2 Leuchterscheinungen, die Stimulations-Lumineszenz [2], [3] und die Radiophotolumineszenz [4].

Die Stimulation beruht darauf, daß Elektronen, die sich in tiefen Anlagerungstermen (Farbzentren) befinden, durch Lichteinstrahlung ins Leitfähigkeitsband befördert werden und von dort wieder in höhere Anlagerungsterme oder in Ag-Aktivator-Terme übergehen können, wobei dann dasselbe Spektrum abgestrahlt wird wie während der Erregung durch energiereiche Strahlung. Nach Abbrechen der Stimulation leeren sich die oberen Anlagerungsterme unter Phosphoreszenz. Es wurde einerseits die Lumineszenz der Gegend von 4000 Å mit einem normalen, diejenige bei 2500 Å mit einem nur auf ultraviolettes, auf sicheres Licht jedoch nicht ansprechenden SEV gemessen (Abb. 4). Die langwellige Bande war am intensivsten bei 1,5 Ag und zeigte zunächst einen Anstieg und erst dann einen Abfall, bei 0,1% Ag fiel sie sofort ab, bei 6% Ag war sie sehr schwach. Die kurzwellige Bande fiel stets sofort nach Einschalten des stimulierenden Lichtes ab. Sie war am intensivsten bei 0,1% Ag. Offenbar finden bei dem Kristall mit mittlerem Ag-Gehalt bevorzugt Übergänge nach dem dem Doppelion zugeordneten Term statt.

Die Glowkurve der Thermolumineszenz (Abb. 5) hat in der langwelligen Bande bei 1,5% Ag ein hohes Maximum und ein schwaches bei hohen Temperaturen. Bei 0,1% Ag ist das erstere Maximum auf $1/50$ abgesunken und das zweite verschwunden. In der kurzwelligen Bande erscheint nur das erste Maximum mit einem wesentlich kleineren Intensitätsverhältnis für die beiden Ag-Konzentrationen. Diese Beobachtungen stehen ebenfalls mit der Vorstellung in Einklang, daß bei dem Kristall mit 1,5% Ag sehr viele Übergänge in Doppelionenterme stattfinden.

Die Radiophotolumineszenz wurde durch 3600 Mrd. erregt. Dabei erscheint eine relativ schmale Lumineszenzbande, die den durch die vorhergehende Bestrahlung mit Röntgenstrahlen oder Elektronen an Silberionen gebildeten Silber-Atomen zugeschrieben wird. Die Anregungsfähigkeit bleibt sehr lange Zeit bei Zimmertemperatur jedenfalls über Monate erhalten. Die Radiophotolumineszenz ist im Gegensatz zur Stimulation-Lumineszenz stabil. Die Lumineszenzbande ändert lediglich zeitlich oder durch Tempern ihre Höhe und spektrale Lage. Ihre Intensität wächst und das Maximum bei 5300 Å verschiebt sich um 100–200 Å nach kürzeren Wellen und zwar bei Zimmertemperatur innerhalb von etwa 8 Tagen, durch Tempern bei 100° sofort.

Was die Anwendung betrifft, so ist silberaktiviertes NaCl als Leuchtstoff für Scintillationen ungeeignet, da die Impulse zu niedrig sind. Hierfür ist NaJ/Tl viel besser. Hingegen eignet sich NaCl/Ag als integrierender Dosismesser und zwar ist dafür prinzipiell sowohl die Stimmulationslumineszenz [2] als auch die Radiophotolumineszenz brauchbar [4]. Die Stimmulationslumineszenz ist sehr empfindlich, besonders, wenn man die 2500 Bande mißt, aber sie ist nicht stabil, im Ge-

satz zur Radiophotolumineszenz, die nach Alter oder Tempern stabil ist. Für die Stimulationsmethode sind Kristalle mit mittlerem Ag-Gehalt günstig, für die Radiophotolumineszenz mit höherem Ag-Gehalt.

Zusammenfassung.

Die Lumineszenz von silberaktiviertem Steinsalz wird mit Röntgenstrahlen und Elektronen beobachtet. Die verschiedenen Arten der Lumineszenz, Momentanleuchten und Phosphoreszenz der Erregung mit energiereicher Strahlung, Momentanleuchten und Phosphoreszenz der Banden 200 und 2500 Å bei der Stimulation mit Licht,

Thermolumineszenz und Radiophotolumineszenz, hängen von der Ag-Konzentration ab. Die Lumineszenzeigenschaften ändern sich bei der Zerstörung durch Elektronen.

Literatur. [1] ETZEL, H. W., J. H. SCHULMANN, R. J. GINTHER u. E. W. CLAFFY: Phys. Rev. **85**, 1063 (1952). — [2] FURST, M. u. H. KALLMANN: Phys. Rev. **91**, 1356 (1953). — [3] MANDEVILLE, C. H. u. H. O. ALBRECHT: Phys. Rev. **91**, 566 (1953). — [4] SCHULMANN, J. H., R. J. GINTHER, C. C. KLICK, R. J. ALGER und R. A. LEVY: Journ. appl. Phys. **22**, 1479 (1951).

Prof. Dr. WILHELM HANLE und Dipl. Phys. HERMANN HINRICHS, Physikalisches Institut der Justus-Liebig-Hochschule Gießen.

Die Sichtbarkeit der Interferenzen beim TWYMAN-Interferometer*.

Von GERHARD HANSEN, Oberkochen.

Mit 6 Textabbildungen.

(Eingegangen am 30. November 1953.)

Über diesen Gegenstand ist schon einmal [1] berichtet und anlässlich einer Tagung der Deutschen Gesellschaft für angewandte Optik in München 1941 vorgetragen worden [2]. Da anscheinend die ausführliche Darstellung wenig bekannt geworden ist und das Vortragsreferat von 1941 nur kurze Angaben enthält, sollen hier die wichtigsten Ergebnisse den hier zu machenden neuen Mitteilungen vorangestellt werden¹.

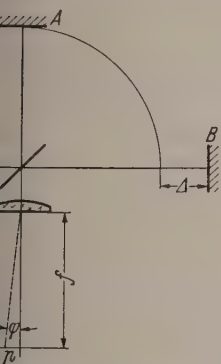


Abb. 1. MICHELSON-Interferometer mit Kamera zur Beobachtung der LUMMER-HAIDINGER-Ringe.

aus der Grundstellung, in der die Wegdifferenz 0 vorhanden ist, um den Betrag Δ verschoben wird, die Regel im übrigen aber parallel stehen, erscheint in Brennebene der Betrachtungslinse ein Ringsystem (LUMMER-HAIDINGER-Ringe). Bringt man in der Brennebene der Linse eine Blende an, die nur einen hellen oder dunklen Teil des Ringsystems hindurchlassen läßt, so sieht man die ganze Linsenöffnung hell oder dunkel. Wenn einer der Spiegel jetzt um eine in der Ebene liegende Achse gedreht wird, so entstehen in der Spiegelebene FIZEAU-Streifen parallel zur optischen Achse. Diese Streifen werden unsichtbar, wenn die Betrachtungsöffnung so groß gewählt wird, daß helle und dunkle Teile des Ringsystems gleichzeitig zu sehen sind. Wird die Blende zentrisch zur Mitte des Ringsystems angebracht, so besteht zwischen dem größten

zulässigen Halbmesser p dieser Blende und der Brennweite der Betrachtungslinse f die Beziehung

$$p = f \sqrt{\frac{\lambda}{2\Delta}}. \quad (1)$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß die Wegdifferenz zwischen Achse und Blendenrand nicht größer sein darf als eine halbe Wellenlänge, wenn die Deutlichkeit der Interferenz-Erscheinung nicht leiden soll. Diese Verhältnisse sind allgemein bekannt¹.

II. Planglasplatte in einem der Lichtwege.

Wird in einen der Lichtwege eines kompensierten MICHELSON-Interferometers eine Planplatte der Dicke D aus Glas mit dem Brechungsvermögen n gesetzt (Abb. 2), so hängt die Wegdifferenz w von D , Δ , n und dem Winkel φ ab, den der betrachtete Strahl mit der Spiegelnormalen bildet,

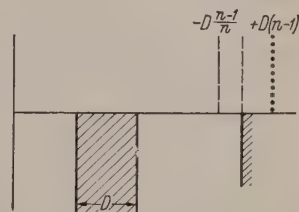


Abb. 2. MICHELSON-Interferometer mit Glasplatte der Dicke D in dem einen Lichtweg. Hier und in den folgenden Figuren ist der Einfachheit halber die Darstellung symbolisch. Die beiden Lichtwege, die normalerweise senkrecht zueinander stehen, sind parallel übereinander gezeichnet.

$$w = 2 \left((n-1) \cdot D - \Delta \right) + \varphi^2 \cdot \left(\frac{n-1}{n} \cdot D + \Delta \right) + \dots \quad (2)$$

Es gibt also zwei ausgezeichnete Stellungen des Spiegels im Vergleichslichtweg: Bei der einen verschwindet

* Herrn Prof. G. Joos zum 60. Geburtstag.

¹ In dem neuesten Buch [3], ist Seite 173/174 etwas über die Sichtbarkeit der Streifen bei der Beobachtung eines Photoeffektes von großem Durchmesser gesagt. Es wird angegeben, daß mit äußerst kleinen Blenden von 0,2 mm Ø gearbeitet werden muß, um kontrastreiche Streifen zu bekommen. Eine Erklärung ist nicht gegeben. Die Möglichkeit der Abhilfe scheint nicht bekannt zu sein.

¹ 1935 erschien in russischer Sprache eine Arbeit von W. v. IGNATOWSKY „Einfluß der Form und der Lage der Lichtquelle bei den Messungen mit dem Interferenzkomparator nach KÖSTERS“ (Standartgis Leningrad/Moskau 1935). In dieser Arbeit wird im wesentlichen erörtert, welchen Einfluß die Wahl einer zu großen Austrittsblende auf die Sichtbarkeit und die Lage der Streifen bei einem kompensierten Interferometer mit ebenen Spiegeln hat. Bei dem Vortrag in München 1941 wurde in der Diskussion auf diese Arbeit von IGNATOWSKY von den Herren KÖSTERS und ENGELHARD hingewiesen. Die Frage der Sichtbarkeit der Interferenzen beim TWYMAN-Interferometer wird in der IGNATOWSKYSchen Arbeit überhaupt nicht berührt. Insofern treffen die Diskussionsbemerkungen nicht zu. Eine Erwiderung von mir wurde durch ein Versehen damals nicht abgedruckt.

das erste Glied, bei der anderen das zweite. Wenn der Spiegel von der Teilungsplatte um den Betrag $(n-1)D$ entfernt wird, ist die Wegdifferenz in der Achse verschwunden. Es bleibt aber eine Abhängigkeit der Wegdifferenz vom Winkel zurück. Es entstehen also Ringe im Brennpunkt der Linse. Diese Lage des Spiegels im Vergleichslichtweg soll die *Null-Ebene* heißen. Nähert man den Spiegel der Teilungsplatte um den Betrag $\frac{n-1}{n} \cdot D$, so verschwindet das zweite Glied. Es ist also jetzt keine Abhängigkeit der Wegdifferenz vom Winkel mehr vorhanden. Die Betrachtungsblende kann dementsprechend beliebig groß gemacht werden. Man kann also eine helle Interferenz-Erscheinung erzeugen, die Wegdifferenz dagegen ist nicht aufgehoben. Je nach der Dicke der Glasplatte muß also mit einer genügend monochromatischen Strahlung beobachtet werden, wenn kontrastreiche Streifen zu sehen sein sollen. Die dieser Spiegellage entsprechende Ebene soll *virtuelle Spiegelebene* heißen. Die virtuelle Spiegelebene liegt in diesem Falle dort, wo die Planplatte ein virtuelles Bild des hinter ihr stehenden Spiegels erzeugt.

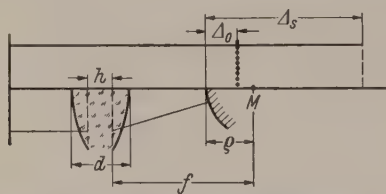


Abb. 3. Sammelndes Linsen-System mit Konvex-Spiegel. Der Krümmungsmittelpunkt M des Spiegels fällt mit dem Brennpunkt des Linsen-Systems zusammen.

III. Sammellinse mit Konvex-Spiegel.

Die Wellenfläche, die eine Sammellinse verläßt, kann nach dem Vorschlag von TWYMAN untersucht werden, indem man im Interferometer an Stelle des ebenen Spiegels das Linsensystem aufstellt und hinter ihm einen Konvex-Spiegel, so daß der Krümmungsmittelpunkt des Spiegels mit dem Brennpunkt der Linse zusammenfällt (Abb. 3). Auch in diesem Falle gibt es eine Null-Ebene, deren Abstand von der Spiegeloberfläche nur durch die optische Weglänge in der Linsenachse gegeben ist, also durch die Summe der Werte $d(n-1)$ für jede einzelne Linse des Systems. Es gibt auch eine virtuelle Spiegelebene dort, wo das Linsensystem, so wie vorher die Planplatte, ein Bild der Spiegeloberfläche entwirft. Der Krümmungsradius des Konvex-Spiegels kann in weiten Grenzen verschieden gewählt werden. Je kleiner man den Radius macht, desto weiter entfernt sich die virtuelle Spiegelebene von der Spiegeloberfläche. Dementsprechend muß bei stark gekrümmtem Konvex-Spiegel mit einer äußerst kleinen Blende in der Brennebene der Betrachtungslinse gearbeitet werden. Zwischen der Brennweite des Systems f , dem Krümmungsradius ρ und dem Abstand Δ_s zwischen dem Spiegel und seinem Bild, also der virtuellen Spiegelebene, besteht die Beziehung

$$\Delta_s = \frac{(f-\rho)^2}{\rho} - h = \sum d_i(n_i - 1). \quad (3)$$

Es geht hier noch der Hauptebenen-Abstand h im sammelnden System ein. Wenn man die virtuelle Spiegelebene entsprechend dieser Beziehung mit der Null-Ebene zusammenfallen läßt, was im allgemeinen durch geeignete Wahl des Krümmungsradius möglich ist, sind beide Bedingungen für das Zustandekommen

heller und kontrastreicher Interferenzen gleichzeitig erfüllt; es kann also mit einer großen Blende im Brennpunkt der Beobachtungslinse gemessen werden. Die Monochromasie der Lichtquelle werden keine besonderen Anforderungen gestellt.

IV. Sammellinse mit Planspiegel gegen Hohlspiegel

Die Beobachtung eines sammelnden Systems kann auch in einer anderen Weise erfolgen. Bei dieser Einrichtung kann der Durchmesser des zu prüfenden Linsensystems viel größer gemacht werden als der Durchmesser der Teilungsplatte. Diese Einrichtung wurde bereits 1916 von TWYMAN und GREEN in der britischen Patentschrift 103 832 bekanntgemacht. Im Vergleichslichtweg wird ein Hohlspiegel aufgestellt, dessen Krümmungsmittelpunkt mit dem Brennpunkt des Linsensystems zusammenfällt. Hinter dem Linsensystem steht ein Planspiegel (vgl. auch [4]).

Betrachten wir zunächst den allgemeinen Fall, da in beiden Wegen sammelnde Systeme, aber von verschiedener Brennweite verwendet werden (Abb. 4). Wenn die längere Brennweite f , die kürzere $v \cdot f$ ist und der Planspiegel von der Linse mit der längeren Brennweite den Abstand a hat, so sei zunächst vorausgesetzt, daß sich der Planspiegel in dem anderen Lichtweg im gleichen Abstand von der Pupille, also von der Teilungsstelle, befindet. In diesem Falle ist der größtmögliche zulässige Radius der Blende an der Teilungsplatte

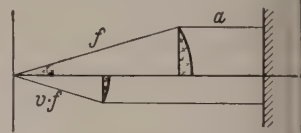


Abb. 4. Die Brennpunkte beider Linsen liegen in der Teilungsfläche.

$$p = f \cdot v \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{f(1-v)^2 + a(1-v^2)}}. \quad (4)$$

Für den Fall, daß im Vergleichslichtweg ein Hohlspiegel mit dem Krümmungsradius ρ verwendet wird (Abb. 5), besteht die Möglichkeit, diesen Krümmungsradius

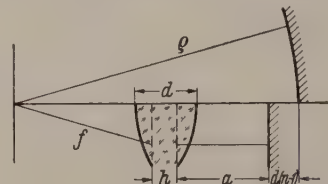


Abb. 5. Linsen-System mit Planspiegel gegen Hohlspiegel im Vergleichslichtweg.

radius dem zu untersuchenden System so anzupassen, daß mit großer Pupille gearbeitet werden kann. Die Bedingung für den Krümmungsradius des Hohlspiegels ist

$$\rho = f(1 + \varepsilon) \pm f \sqrt{(1 + \varepsilon)^2 - 1}; \quad \varepsilon = \frac{h + \sum d(n-1)}{2f}. \quad (5)$$

Zur Untersuchung eines Tele-Objektives, bei dem der Scheitelabstand des Brennpunktes wesentlich kleiner ist als die Brennweite, kann diese Untersuchungsmethode vorteilhaft sein gegenüber der entsprechenden Abb. 3. Bei einem Tele-System ist der Krümmungsradius des Konvex-Spiegels normalerweise durch den Scheitelabstand des Brennpunktes begrenzt. Man ist also bei dieser Anordnung unter Umständen zur Verwendung sehr enger Blenden genötigt. Bei einer Anordnung entsprechend Abb. 5 ist es in einem solchen

e dagegen in der Regel möglich, die Bedingung der (5) streng zu erfüllen. Ein Nachteil kann freilich in bestehen, daß der Durchmesser des in diesem zu verwendenden Hohlspiegels wesentlich größer muß als im Falle einer Anordnung nach Abb. 3.

V. KEPLERSches Fernrohr gegen Planspiegel.

Etwas verwickelter liegen die Verhältnisse bei der Untersuchung eines Fernrohres. Daß die Prüfung des Fernrohres im Interferometer auf einfache Weise möglich ist, ist bekannt [5]. Die Frage der Sichtbarkeit der Streifen wurde aber bisher nicht erörtert. Es sen nämlich bei der Beobachtung des Fernrohres im

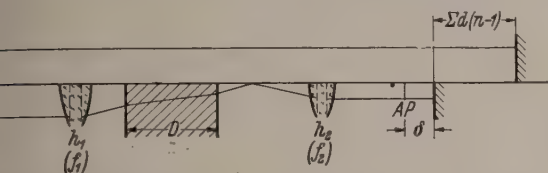


Abb. 6. KEPLERSches Fernrohr mit Planplatte der Dicke D zwischen Objektiv und Okular gegen Planspiegel im Vergleichslichtweg.

gemeinen gar keine besonderen Schwierigkeiten auf, es leicht ist, empirisch diejenige Stelle zu finden, der man den Planspiegel dicht hinter dem Okular stellen muß, um mit großer Pupille arbeiten zu können. Welches ist diese Stelle? Im Vergleichslichtweg steht ein Planspiegel (Abb. 6). Das Fernrohr ist so gestellt, daß das Objektiv der Teilungsplatte zugeordnet ist. Hinter dem Okular steht ein Planspiegel in einem Abstand δ von der Austrittspupille (AP). Das Fernrohr erzeugt von dem Planspiegel ein Bild, dessen sich sehr schnell verändert, wenn der Abstand zwischen Planspiegel und Fernrohr um geringe Beträge verändert wird. Bei stark vergrößerndem Fernrohr erfolgt diese Bildverschiebung etwa um einen Faktor v^2 schneller. Im allgemeinen ist zwischen den Linsen des Fernrohres ein System von Prismen angeordnet, das optisch die Wirkung einer planparallelen Glasplatte hat (Dicke D). Wenn der Abstand des

Planspiegels von der Austrittspupille entsprechend dem Ausdruck

$$\delta = \frac{1}{v^2 - 1} \cdot \left[f_1 \frac{v + 1}{v^2} \left(2v + (1 - v) \frac{f_1}{h_1 + f_1} \right) + \left(h_1 + h_2 + D \frac{n - 1}{n} \right) + \sum d(n - 1) \right], \quad (6)$$

gewählt wird, fallen Null-Ebene und virtuelle Spiegelebene zusammen. Bei einem Fernrohr ohne Glasweg mit dünnen Linsen, bei dem die Vergrößerung v groß gegen 1 ist, ist der Abstand zwischen Planspiegel und Austrittspupille etwa gleich der Objektiv-Brennweite dividiert durch das Quadrat der Vergrößerung.

Die Vorstellung der virtuellen Spiegelebene und der durch ihre Lage zum Bild des Spiegels im Vergleichslichtweg gegebenen Abstände der LUMMER-HAIDINGER-Ringe gibt die Möglichkeit, die Sichtbarkeits-Verhältnisse in allen Fällen vollständig zu übersehen. Damit ist die anlässlich des Vortrages von J. GUILD [6] aufgeworfene Frage vollständig beantwortet.

Zusammenfassung.

Bei Untersuchung von Linsensystemen mit dem Interferometer nach TWYMAN wünscht man helle, kontrastreiche Interferenz-Streifen zu erzeugen. Die Art der Anordnung und der Krümmungsradius der Hohl- oder Konvex-Spiegel des Interferometers haben Einfluß auf die Größe der Beleuchtungsblende, die nicht überschritten werden darf, ohne daß der Kontrast im Interferenzbild verringert wird. Die Zusammenhänge zwischen den Eigenschaften der Linsensysteme und denen des Interferometers werden angegeben.

Literatur: [1] HANSEN, G.: Zeiss-Nachrichten 4, 109 (1942). — [2] Zeitschrift für Instrumentenkunde, 61, 411 (1941). — [3] CANDLER, C.: Modern Interferometers, Hilger u. Watts Ltd. 1951. — [4] BAUER, W. und E. LAU: Feingeräte Technik 1, 64 (1952). — [5] COLEMAN, H. S., D. G. CLARK and M. F. COLEMAN: JOSA 37, 671 (1947). — [6] GUILD J.: Proc. Phys. Soc., London, 33, 40 (1921).

Dr. GERHARD HANSEN, Carl Zeiss, Oberkochen/Württ.

Elektrisches und optisches Verhalten hygroskopischer Kristalle mit Kristallwasser*.

Von LUDWIG HECHLER, KARL HEINZ HELLWEGE und KARL RETTIG, Darmstadt.

Mit 10 Textabbildungen.

(Eingegangen am 7. Januar 1954.)

I. Einleitung.

Vor einiger Zeit haben HELLWEGE und JOHNSEN [1] an Einkristallen von $\text{Pr}_2\text{Zn}_3(\text{NO}_3)_{12} \cdot 24 \text{H}_2\text{O}$ die dielektrische Anomalie beobachtet, die bei einer kritischen Temperatur von etwa -30°C auftritt. Diese Beobachtung verdiente eine genauere Nachprüfung, da ihr eine Strukturänderung des Kristallgitters hätte zugrundeliegen können, durch die die theoretische Grundlage einiger Untersuchungen [2], [3] über das Spektrum dieser Kristalle, nämlich Unveränderlichkeit der Kristallstruktur von Zimmer-temperatur bis hinab zu Heliumtemperaturen, in Frage gestellt worden wäre.

Wir haben deshalb an dem genannten Pr-Salz und an isomorphen $\text{Ce}_2\text{Zn}_3(\text{NO}_3)_{12} \cdot 24 \text{H}_2\text{O}$ die DK ϵ und

den Verlustfaktor $\text{tg } \delta$ ausführlich untersucht. Die experimentellen Ergebnisse entsprechen weitgehend denen von BAYLEY [4] an anderen wasserlöslichen Kristallen. Um die von BAYLEY vorgeschlagene Deutung durch „adsorbierte, wahrscheinlich monomolekulare Wasserschichten“ zu prüfen und um einige bei BAYLEY nicht erklärte Befunde aufzuklären, haben wir die elektrischen Untersuchungen durch optische ergänzt und das Absorptionsspektrum, die Durchlässigkeit und das Streuvermögen als Funktion der Temperatur untersucht.

II. Experimentelles.

a) Substanzen.

Die beiden untersuchten Doppelnitrate $\text{Pr}_2(\text{Ce}_2)\text{Zn}_3(\text{NO}_3)_{12} \cdot 24 \text{H}_2\text{O}$ wurden aus wässriger, im allgemeinen etwas saurer Lösung in Form von trigonalen Ta-

* Herrn Prof. Dr. G. Joos zum 60. Geburtstag gewidmet.

feln der Symmetrie D_{3d} gezogen. Sie enthalten fast immer Einschlüsse von Mutterlauge, die als „schattige“ Stellen im sonst klaren Kristall erkennbar sind. Außerdem sind sie hygroskopisch, so daß sie bei normalen Zimmerbedingungen auf ihrer Oberfläche eine Schicht wässriger Lösung tragen. Deshalb sind die an derartigen Kristallen gemessenen Größen Mittelwerte über Kristall, Einschlüsse und Oberflächenschicht. Zum Vergleich wurde noch das ebenfalls hygroskopische $Zn(NO_3)_2 \cdot 6H_2O$ untersucht. Die optischen Messungen wurden an Einkristallen, die elektrischen an Kristallpulvern durchgeführt. Hier wurde der Füllgrad des Kondensators nicht bestimmt. Die im folgenden angegebenen Werte von ϵ und $\tan \delta$ sind die der inhomogenen Füllung, nicht die der eingefüllten Substanz.

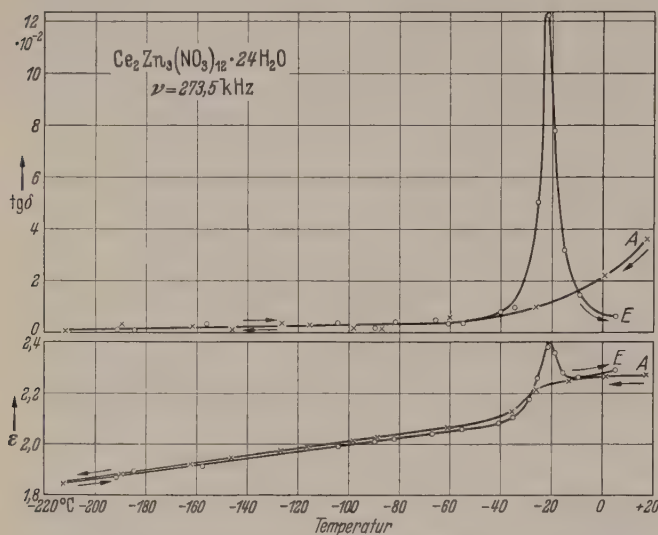


Abb. 1. Dielektrizitätskonstante ϵ und Verlustfaktor $\tan \delta$ an Pulver von Cer-Zink-Nitrat. In allen Abbildungen bedeutet A den Anfang, E das Ende der Meßreihe. In den folgenden Abbildungen wird der unwichtige Temperaturbereich unterhalb -70°C nicht mehr dargestellt.

b) Temperaturgang.

Der Temperaturbereich von Zimmertemperatur bis hinab zu 60°K wurde mit dem von HELLWEGE und JOHNSEN [1] beschriebenen Kühltopf beherrscht, nachdem nur unwesentliche Änderungen, z. B. an den Elektrodendurchführungen vorgenommen waren. Für die optischen Messungen dagegen befand sich der Kristall auf einem Halter im Innern eines unversilberten Dewargefäßes in einem Kühlbad aus Äthyläther, in das ein Reagensglas mit siedender flüssiger Luft tauchte.

c) Elektrische Messungen.

Für die Messungen standen drei Geräte der Firma Rohde und Schwarz zur Verfügung: von 50 Hz bis 300 kHz die Meßbrücke Type VKB/BN 3520, von 100 kHz bis 10 MHz der Leitwertmesser Type VLU, von 10 MHz bis 100 MHz der Leitwertmesser Type VLUK/BN 3511. Bei allen drei Geräten mußte der im Kühltopf befindliche Meßkondensator über eine Zuleitung angeschlossen werden. Das machte bei den höchsten Meßfrequenzen, d. h. bei dem zuletzt genannten Gerät eine merkliche Korrektur an den abgelesenen Meßwerten erforderlich¹, die bei den beiden anderen Geräten vernachlässigt werden konnte.

¹ Unterlagen stehen Interessenten auf Anfrage zur Verfügung.

d) Optische Messungen.

Das sichtbare Absorptionsspektrum des Pr-Salts wurde mit einem Steinheil-Dreiprismenapparat photographiert. In die Ebene des Spektrographenspaltes, in die der Kristall abgebildet wurde, konnte teilweise auch ein Photoelement zur Messung der gesamten Durchlässigkeit des Kristalls für Glühlicht oder eine photographische Platte gestellt werden. Auf den so gewonnenen Lichtbildern waren durchlässige und undurchlässige Teile des Kristalls zu unterscheiden. Um zu prüfen, ob die Undurchlässigkeit aus Streuverlusten beruht, wurde mit einem zweiten Photoelement auch das vom Kristall unter 90° zur Seigestreute Licht gemessen.

e) Zeitlicher Verlauf der Messungen.

Sowohl bei den elektrischen wie den optischen Messungen wurde die Temperatur mit einer Geschwindigkeit von etwa $dT/dt \approx 1^\circ\text{C min}^{-1}$ geändert. Abweichungen hiervon, speziell Temperaturhaltepunkte, sind im folgenden besonders gekennzeichnet.

III. Ergebnisse.

a) Elektrische Messungen.

Abb. 1 zeigt die Temperaturabhängigkeit von ϵ und $\tan \delta$. Die Messung beginnt bei Zimmertemperatur. Beim Abkühlen bis -220°C nehmen beide Größen monoton ab. Beim Wiedererwärmen jedoch durchlaufen sowohl ϵ wie $\tan \delta$ ein Maximum, das je nach der Meßfrequenz zwischen -30°C und -20°C liegt. Derartige Kurven sind von BAYLEY [4] auch an anderen wasserlöslichen Kristallen bei Anwesenheit von Wasserdampf gemessen und auf „adsorbierte, wahrscheinlich monomolekulare“ Wasserschichten und speziell chemische Bindungstypen zurückgeführt worden, ohne daß allerdings eine Erklärung für das verschiedenartige Verhalten beim Abkühlen und Wiedererwärmen gegeben wurde. Wir möchten dagegen die folgende Erklärung vorschlagen:

Das hygroskopische Pulver zieht Wasserdampf aus der Zimmerluft an, so daß sich auf der Oberfläche der Kristallkörner eine Lösung bildet, die wir als praktisch gesättigt ansehen können¹. Vor Beginn der Messung wird der Kühltopf von der Zimmerluft abgeschlossen und aus Gründen der Wärmeisolierung evakuiert. Erst dann kann mit flüssiger Luft kontrollierbar gekühlt werden. Während des Pumpens verdampft um so mehr Wasser aus der Lösung, je länger man mit dem Abkühlen wartet. Da nach Abb. 2 die Maxima von ϵ und $\tan \delta$ mit wachsender Pumpenzeit abnehmen, müssen sie durch Wasser bedingt sein, das nicht als Kristallwasser eingebaut ist². Bei den Temperaturen in der Nähe des Maximums wird es als Eis vorliegen. Tatsächlich haben die Kurven für Eis ein (von Verunreinigungen stark abhängiges) Maximum in dem auch von uns beobachteten Temperaturgebiet [5]. Wenn in unseren Messungen beim Abkühlen das Maximum fehlt, so muß hier beim Durchlaufen des kritischen Temperaturbereiches das Eis fehlen. Das ist auch verständlich. Da nämlich die Löslichkeit mit sinkender Temperatur abnimmt, fällt beim Abkühlen zunächst kristalline Substanz aus, die auf den Kristall

¹ Diese Voraussetzung ist für das folgende nicht entscheidend.

² Verwitterungserscheinungen an den Präparaten wurden auch nach tagelangem Lagern im Vakuum nicht beobachtet.

ern aufwächst. Die Lösung darüber bleibt jeweils ätigt, bis am eutektischen Punkt die ganze Lösung wird, indem Salz- und Eiskriställchen getrennt fallen. Wir nehmen (in Übereinstimmung mit den ischen Messungen, siehe b) an, daß dieser Punkt erhalb des kritischen Temperaturbereiches liegt, so während der Abkühlung kein Eis vorhanden ist, auch kein Maximum gemessen werden kann. Da Temperaturintervall zwischen $+20^{\circ}\text{C}$ und -60°C den normalen Messungen in jeder Richtung in

Tatsache, daß bei anderen hygroskopischen Salzen, wie z. B. dem Zinknitrat $\text{Zn}(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ das im übrigen analoge Maximum etwas verschoben ist ¹.

Bei den bisherigen Überlegungen wurden nur Oberflächenschichten, nicht dagegen Einschlüsse von Lösung diskutiert. Das wurde durch die in Abb. 2 dargestellten Abpumpversuche nahegelegt und ist auch vernünftig, da beim Pulvern der Kristalle auf eine Korngröße von etwa 0,1 mm etwa vorhandene, mit Mutterlauge gefüllte Hohlräume geöffnet werden. Dem-

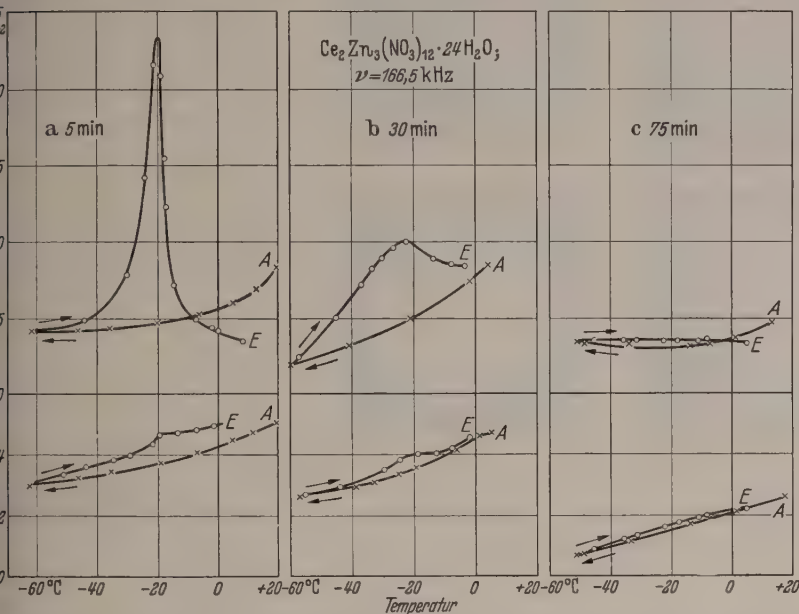


Abb. 2. Wie Abb. 1, jedoch erst nach verschieden langem Abpumpen vor Beginn des Abkühlens: a) 5 min, b) 30 min, c) 75 min. Durch Abpumpen des Wassers verschwinden die Maxima.

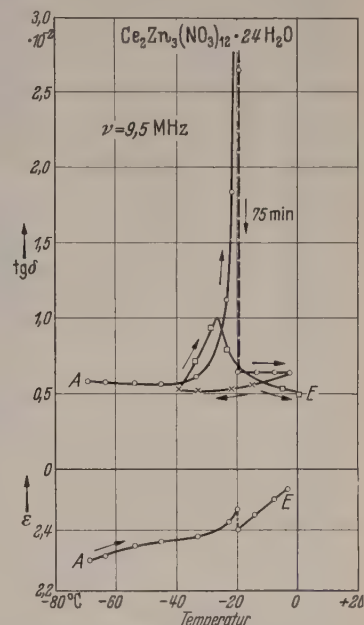


Abb. 3. In der Nähe des Maximums wird die Temperatur für 75 min konstant gehalten. Mit der Einstellung des Gleichgewichts verschwindet das Maximum, um bei nochmaliger Messung wieder aufzutreten.

ra 45–60 Minuten durchlaufen wird, kann man nt erwarten, daß man nur Gleichgewichte durchft. Im Gegenteil muß angenommen werden, daß Keimbildungs-, Kristallisations- und Schmelzvorge mit diesem Tempo nicht Schritt halten können, daß merkliche Verzögerungen beim Abkühlen wie wärmen auftreten. Das führt, dazu daß beim Erermen das Eis nicht sofort am eutektischen Punkt, dern erst bei höheren Temperaturen schmilzt, so jetzt Maxima von ϵ und $\text{tg } \delta$ gemessen werden. Die xima werden also durch Nichtgleichgewichtszude bedingt. Die Richtigkeit dieser Vorstellung rde dadurch geprüft, daß in einer Meßreihe beim eichen des Maximums die Temperatur nicht weiter eigt, sondern konstant gehalten wurde. Im fe einer Wartezeit von $1\frac{1}{4}$ Stunde sanken dann die rte von ϵ und $\text{tg } \delta$ gemäß dem Schmelzen des Eises siehe Abb. 3. Bei nochmaligem Abkühlen und edererwärmen mit normaler Geschwindigkeit war Maximum von $\text{tg } \delta$ wieder vorhanden (Abb. 3, ter Kurventeil, ϵ wurde hier nicht gemessen).

Wie Abb. 4 zeigt, ist die Lage des Maximums frenzabhängig: mit steigender Frequenz verschiebt es von -30°C bei 9 kHz bis etwa -20°C bei 40 z. Auch die Dispersion hat also denselben Gang bei Eis [5]. Die Streuung der Meßpunkte ist dazurückzuführen, daß sowohl die genaue Lage wie h die Breite der Maxima etwas von der Vorgeichte der einzelnen Probe abhängt, z. B. vom anglichen Wassergehalt, von der Geschwindigkeit der nperaturänderung usw. Dem entspricht auch die

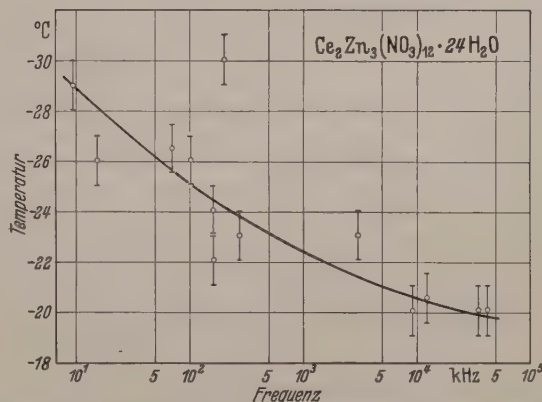


Abb. 4. Lage des Maximums von $\text{tg } \delta$ als Funktion der Meßfrequenz.

gegenüber tritt bei der folgenden Diskussion der optischen Befunde an Einkristallen das Verhalten der Einschlüsse in den Vordergrund.

b) Optische Messungen.

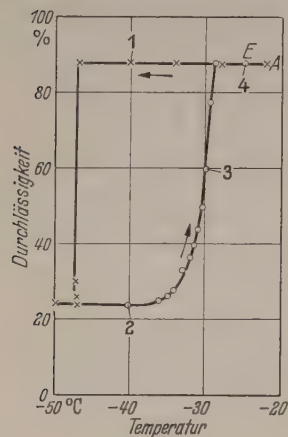
1. Absorptionsspektrum.

Im Temperaturbereich von $+20^{\circ}\text{C}$ bis -100°C zeigt das Spektrum keine andere Veränderung als die mit der gewöhnlichen thermischen Konstruktion verbundene stetige Linienverschiebung. Eine Struktur-

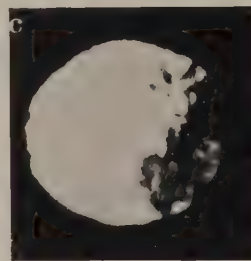
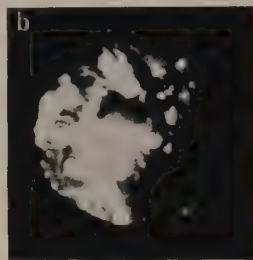
¹ Es sei auch darauf hingewiesen, daß von FREYMAN [6] am System 90% NaCl, 10% H_2O bei einer Frequenz von 10 000 MHz ein Maximum von ϵ'' bei der Temperatur -20°C beobachtet wurde. Zusammenfassung der in Rennes gemachten Arbeiten in [7].

änderung tritt also *nicht* ein¹. Dagegen wurde eine temperaturabhängige *Trübung* der Kristalle beobachtet, die im Zusammenhang mit den elektrischen Messungen steht.

2. *Trübung*. Abb. 5 zeigt einen typischen Fall. Der Kristall enthielt Lösungseinschlüsse; seine Oberflächen wurden plangeschliffen und vor dem Eintauchen in das Kältebad abgetrocknet. Die



a)



b)

Abb. 5. Durchlässigkeit einer Kristallplatte von CeZn-Nitrat, Schichtdicke 1 mm, mit Einschlüssen. a) Durchlässigkeitskurve, b) Aufnahme des Kristalls hinter einer Blendenöffnung des Kristallhalters, Durchsicht. Durchmesser 5 mm. Negative, die schwarzen Stellen sind undurchlässig.

Die Aufnahmen a, b, c, d sind an den Stellen 1, 2, 3, 4 der Durchlässigkeitskurve gemacht.

Durchlässigkeit bleibt beim Abkühlen bis -47°C konstant und sinkt dann auf etwa 25% ab. Der Kristall wird trübe, und zwar nach Abb. 6 deshalb, weil Licht seitwärts herausgestreut wird. Beim Wiedererwärmen bleibt die Trübung zunächst erhalten und verschwindet erst wieder oberhalb von -35°C . Ein anschauliches Bild der Trübung vermitteln die in Abb. 5b wiedergegebenen Durchsichtphotographien der Kristallplatte. Offenbar friert hier die in dem Kristall eingeschlossene Lösung nach dem auf S. 207 für die Oberflächenschichten diskutierten Mechanismus bei -47°C eutektisch aus, wobei die einzelnen Kristallite das Licht zur Seite streuen. Wie Abb. 7 zeigt, variiert die Einfriertemperatur am gleichen Kristall stark von Versuch zu Versuch, d. h. es treten Unterkühlungen auf (tiefster gemessener Wert: -70°C , höchster gemessener Wert: -40°C). Nach Abb. 8 können auch verschiedene von einander getrennte Einschlüsse bei verschiedenen Temperaturen einfrieren, d. h. mehrere Stufen in der Kurve auftreten. Bei der normalen Änderungsgeschwindigkeit der Temperatur von etwa $dT/dt \approx 1 \text{ grad min}^{-1}$ werden also keine Gleichgewichtszustände durchlaufen. Aus diesem Grunde wurde in den Abb. 5 bis 10 bei Erreichen des Einfrierpunktes die Temperatur für wenige Minuten konstant gehalten, um den senkrechten Abfall zu messen. Hält man die Temperatur an anderen Stellen der Kurven konstant (Abb. 9), so beobachtet man auch hier eine Änderung der Durchlässigkeit in Richtung auf den Gleichgewichtszustand, d. h. man beobachtet optisch dasselbe wie elektrisch in Abb. 3.

¹ Damit bleibt die Grundlage der Arbeiten [2, 3] unberührt. Jedoch können die *regellos* im Eutektikum ausfallenden Kriställchen (siehe das folgende I) die Polarisation der Absorptionslinien an Einkristallen verfälschen (Depolarisation s. 2, 3).

Wird die Oberfläche des Kristalls befeuchtet (etwa durch Anhauchen oder längere Lagerung an Zimmertemperatur), so gefrieren auch die Oberflächenschichten und Streuverluste sind entsprechend größer. Die Abb. 10 gibt zwei Beispiele, und zwar ist in Abb. 10a ein Kristall mit ziemlich viel Einschlüssen, in Abb. 10b ein praktisch homogener, klarer Kristall untersucht worden. Wie man sieht, machen die verhältnismäßig dünnen Oberflächenschichten an den vertikalen Kristallflächen haften bleibenden Oberflächen

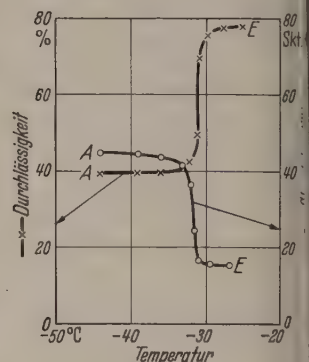


Abb. 6. Durchlässigkeit und Streuintensität (willkürliche Einheit) einer Platte von NdMg-Nitrat.

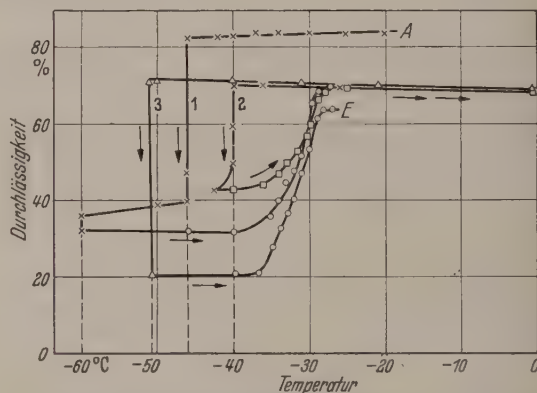


Abb. 7. Streuung der Einfriertemperatur an einem CeZn-Nitrat-Kristall bei dreimaligem Durchlaufen des Temperaturintervalls. Kristall mit Einschlüssen, aber trockener Oberfläche.

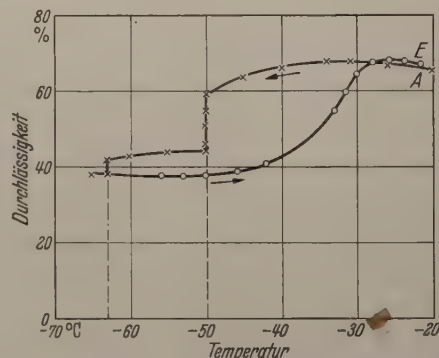


Abb. 8. Getrenntes Ausfrieren zweier Einschlüsse in einem Pr-Zn-Nitrat-Kristall mit trockener Oberfläche.

flächenschichten viel weniger aus als die eingeschlossenen Lösungsvolumina im Innern des Kristalls. Da bei Anwesenheit von Oberflächenschichten

zwei Einfrierpunkte beobachtet werden, brauchen Einfrierpunkte von Einschlüssen und Lösung nicht verschieden zu werden, d. h. die oben unter a) für Oberflächenschicht gegebene Erklärung der elek-
trischen Messungen muß auch für die etwa noch vor-
handenen Einschlüsse gelten.

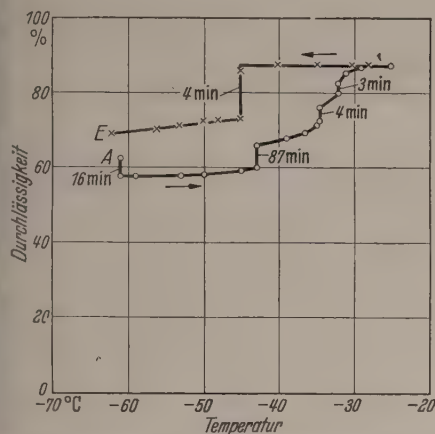


Abb. 9. Einstellung von Gleichgewichtszuständen bei konstant gehaltener Temperatur.

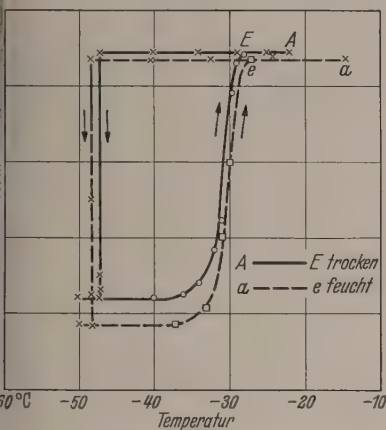


Abb. 10. Einfluß von Oberflächenfeuchtigkeit auf die Durchlässigkeit einer Einkristallplatte. Zn-Nitrat, Schichtdicke 1 mm, Einschlüsse. b) CeZn-Nitrat, Schichtdicke 2 mm, keine Einschlüsse. Die verschiedenen Anfangsordinatenwerte bei A, α , ϵ der drei Kurven in Abb. 10 b rühren nicht nur von verschiedener Durchlässigkeit, sondern vorwiegend von Orientierungsfehlern beim Wiedereinbringen des befeuchteten Kristalles in das Kältebad her.

Insgesamt ergänzen die optischen Befunde die elektrischen in folgenden Punkten: 1. Der Einfrierpunkt liegt tatsächlich, wie oben gefordert, unterhalb des eutektischen Bereiches, in dem die dielektrischen Maxima des Eises liegen. 2. Das eutektische Kristallitgemisch wird durch die Lichtstreuung direkt nachgewiesen.

Ein Widerspruch zwischen beiden Meßreihen besteht zunächst darin zu bestehen, daß die optische

Trübung im wesentlichen unterhalb -29°C beobachtet wird¹, während die dielektrischen Maxima im wesentlichen oberhalb dieser Temperatur liegen. Der Widerspruch verschwindet aber, sobald man bedenkt, daß bereits sehr wenig Schmelzflüssigkeit zwischen den Kristalliten genügt, um optischen Kontakt herzustellen und die Streuung zu verhindern.

IV. Zusammenfassung.

a) DK ϵ und Verlustfaktor $\text{tg } \delta$ von kristallinem $\text{Ce}_2\text{Zn}_3(\text{NO}_3)_{12} \cdot 24 \text{H}_2\text{O}$ und $\text{Zn}(\text{NO}_3)_2 \cdot 6 \text{H}_2\text{O}$ werden im Frequenzbereich von 9 kHz bis 42 MHz und im Temperaturbereich von -213°C bis $+20^{\circ}\text{C}$ gemessen. Beide Größen zeigen Maxima zwischen -30°C und -20°C , die nur bei Anwesenheit von Wasser auf der hygroskopischen Oberfläche oder in Lösungseinschlüssen vorhanden sind und deshalb dem eutektisch ausfallenden Eis zugeschrieben werden.

b) Der Frequenzgang der Maxima wird bestimmt.

c) Das eutektisch ausfallende Gemisch von Salz- und Eiskriställchen wird durch seine Lichtstreuung direkt nachgewiesen.

d) Das mit dem Cersalz isomorphe Praseodymsalz zeigt in dem ganzen untersuchten Temperaturbereich keine Änderung des Absorptionsspektrums, außer der mit der thermischen Ausdehnung verbundenen Linienverschiebung. Eine Strukturumwandlung tritt also nicht auf.

Literatur. [1] HELLWEGE, K. H. u. U. JOHNSON: erscheint in Z. Physik. — [2] HELLWEGE, A. M. u. K. H.: Z. Physik **130**, 549 (1951); **133**, 174 (1952); **135**, 92 (1953). — [3] BROCHARD, J. und K. H. HELLWEGE: Z. Physik **135**, 620 (1953). — [4] BAYLEY, S. T.: Trans. Faraday Soc. **47**, 518 (1951). — [5] HUMBEL, F., F. JONA und P. SCHERRER: Helvetica Physica Acta **26**, 17 (1953). — [6] FREYMAN, M. und R. FREYMAN: C. R. **232**, 1096 (1951). — [7] FREYMAN, R.: J. Chim. Phys. **50**, C 27 (1953).

Dipl. Phys. LUDWIG HECHLER,
Prof. Dr. phil. KARL HEINZ HELLWEGE,

Dipl. Phys. KARL RETTIG,
Institut für technische Physik der T. H. Darmstadt.

¹ Man beachte aber das obere Ende der Erwärmungskurve in Abb. 9!

Die Emission eines Hochdruckplasmas im langwelligen Ultrarot als Röntgenbremsspektrum*.

Von GERHARD HETTNER, München.

(Eingegangen am 7. Januar 1954.)

Die seit langer Zeit bekannte Emission und Abtönung des Hg-Hochdruckbogens und anderer Hochdruckbögen im Gebiet der Zehntelmillimeterwellen

wurde kürzlich vom Vf. [1] auf die Elektronenübergänge im kontinuierlichen Eigenwertspektrum der Atome zurückgeführt. Es handelt sich hiernach um die Emission und Absorption von Strahlung durch die freien Elektronen des Plasmas unter dem Einfluß

Herrn Prof. Dr. G. Joos zum 60. Geburtstag gewidmet.

der elektrischen Felder der Ionen. Man kann also die Energieverteilung der Strahlung als ein Röntgenbremsspektrum auffassen. Es liegt daher nahe, den Emissions- und Absorptionskoeffizienten eines Hochdruckplasmas in diesem Spektralgebiet unmittelbar aus den bekannten Ausdrücken für die Intensität des Röntgenbremsspektrums abzuleiten.

Wir betrachten zunächst ein ruhendes geladenes Teilchen, in unserem Falle ein einfach positives Ion, das sich in einem Elektronenstrom von einem Elektron je Flächeneinheit mit der asymptotischen Anfangsgeschwindigkeit v_1 befindet. Die Streuung des Elektronenstroms im Felde des Ions führt zur Emission eines kontinuierlichen Spektrums. Da es sich bei v_1 um thermische Geschwindigkeiten, einer Temperatur von etwa 6000° entsprechend, handelt, ist bei der Berechnung der Energieverteilung dieses Spektrums diejenige Näherung noch zulässig, bei der $\frac{v_1}{c} \ll \alpha_F$ (Feinstrukturkonstante) gesetzt wird.

Wir führen ein kartesisches Koordinatensystem xyz ein, dessen x -Achse die Richtung der asymptotischen Geschwindigkeit v_1 habe, und betrachten zunächst nur die in der x -Richtung polarisierte und senkrecht zu x ausgestrahlte Leistung $J_1^{(x)}$ je Flächeneinheit in der Entfernung r vom Ion [2]

$$J_1^{(x)} = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}} \frac{e^6}{c^3 m^2 r^2 v_1^2}. \quad (1)$$

Unter dem Winkel ϑ gegen die x -Richtung hat man dann für die in der x - r -Ebene polarisierte Leistung

$$J_\vartheta^{(x)} = J_1^{(x)} \sin^2 \vartheta$$

und für die nach allen Richtungen ausgesandte Leistung

$$J^{(x)} = r^2 J_1^{(x)} \int \sin^2 \vartheta d\Omega = \frac{8\pi}{3} r^2 J_1^{(x)}.$$

Nun gilt für die beiden anderen Koordinatenrichtungen

$$J^{(y)} = J^{(z)} = \frac{1}{4} J^{(x)}$$

also für die gesamte Strahlungsleistung

$$J = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) J^{(x)} = 4\pi r^2 J_1^{(x)}.$$

Die in den Raumwinkel 1 im Mittel über alle Richtungen ausgestrahlte Leistung wird schließlich

$$\frac{J}{4\pi} = r^2 J_1^{(x)} = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}} \frac{e^6}{c^3 m^2 v_1^2}. \quad (2)$$

Hier ist bei fester Einfallrichtung der Elektronen über alle Ausstrahlungsrichtungen gemittelt. Man erhält dasselbe Ergebnis, wenn man bei vorgegebener Ausstrahlungsrichtung über alle Einfallrichtungen der Elektronen mittelt.

Es seien nun N_e und N_i Elektronen und Ionen je Volumeneinheit vorhanden, dann wird der auf die Volumen- und Raumwinkeleinheit bezogene Emissionskoeffizient

$$\varepsilon_v = N_e N_i v_1 \frac{J}{4\pi} = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}} \frac{N_e N_i e^6}{c^3 m^2 v_1}. \quad (3)$$

Wenn nun eine bestimmte Verteilung der Anfangsgeschwindigkeiten v_1 besteht, so wird schließlich bei

Mittlung über die Geschwindigkeiten

$$\bar{\varepsilon}_v = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}} \frac{N_i N_e e^6}{c^3 m^2} \frac{1}{v_1}.$$

Bei MAXWELLScher Geschwindigkeitsverteilung ist

$$\frac{1}{v_1} = \sqrt{\frac{2m}{\pi kT}},$$

also

$$\bar{\varepsilon}_v = \frac{8}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \frac{N_i N_e e^6}{c^3 m^{3/2} (kT)^{1/2}}.$$

Im neutralen Plasma ist $N_i = N_e$ und im Falle des lokalen thermodynamischen Gleichgewichts, was wir es in einem Hochdruckplasma auch bei inhomogener Temperaturverteilung annehmen können, ist durch die Saha-Gleichung bestimmt, die wir in der Form von SCHULZ und WEIZEL [3] abgeleitet. Ist N die Zahl der in der Volumeneinheit vorhandenen neutralen Atome, dann ist $N_e \ll N$. In diesem Falle lautet die SAHA-Gleichung

$$p \left(\frac{N_e}{N} \right)^2 = \frac{\sigma_i \sigma_e}{\sigma_0} \frac{kT (2\pi m kT)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{U}{kT}}.$$

Hierin sind p der Gasdruck, U die Ionisierungsenergie der Atome und σ_i , σ_e und σ_0 die Zustandssummen der Ionen, der Elektronen und der neutralen Atome. Setzt man $p = N kT$, so wird

$$N_i N_e = N_e^2 = \frac{\sigma_i \sigma_e}{\sigma_0} \frac{N (2\pi m kT)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{U}{kT}}$$

folglich

$$\bar{\varepsilon}_v = \frac{32\pi^2}{3\sqrt{3}} \frac{\sigma_i \sigma_e}{\sigma_0} \frac{e^6}{c^3 h^3} N kT e^{-\frac{U}{kT}}$$

oder mit Einführung der Feinstrukturkonstante

$$\alpha_F = \frac{2\pi e^2}{c h}$$

$$\bar{\varepsilon}_v = \frac{4}{3\sqrt{3}\pi} \frac{\sigma_i \sigma_e}{\sigma_0} \alpha_F^3 p e^{-\frac{U}{kT}}. \quad (7)$$

Bezieht man den Emissionskoeffizienten auf das Wellenlängenintervall 1, so wird

$$\varepsilon(\lambda, T, p) = \bar{\varepsilon}_v \frac{c}{\lambda^2} = \frac{4}{3\sqrt{3}\pi} \frac{\sigma_i \sigma_e}{\sigma_0} c \alpha_F^3 \frac{p}{\lambda^2} e^{-\frac{U}{kT}}. \quad (8)$$

Für die Zustandssummen können die Gewichte der Grundzustände eingesetzt werden, also z. B. für Hg $\sigma_0 = 1$, $\sigma_i = 2$, $\sigma_e = 2$; für Xe: $\sigma_0 = 1$, $\sigma_i = 6$, $\sigma_e = 2$. Der Zahlenfaktor wird also für Hg $\frac{16}{3\sqrt{3}\pi}$ für Xe $\frac{48}{3\sqrt{3}\pi}$.

Damit ergibt sich bei Hg eine vollständige Übereinstimmung des Ausdrucks für $\varepsilon(\lambda, T, p)$ einschließlich des Zahlenfaktors mit dem früher auf anderem Wege abgeleiteten Ausdruck. Auch beim Xe stimmen die Ergebnisse beider Ableitungen überein. Denn beim Xe wäre der beim Hg benutzte, schon von UNSÖLD [4] eingeführte Gewichtungsfaktor $\gamma = 4$ durch $\gamma = 12$ zu ersetzen. Es ist bemerkenswert, daß diese Übereinstimmung nur bei Anwendung der von SCHULZ und WEITZEL (a. a. O.) an der Saha-Gleichung angebrachten Korrektur zu erzielen ist.

allerdings kann man aus dieser Übereinstimmung auf eine strenge Gültigkeit der Formeln (7) (8) schließen. Denn bei beiden Ableitungen, die nur durch die Art der Anwendung der thermischen Statistik unterscheiden, werden die Funktionen des Atoms durch Wasserstoffeigenschaften angenähert.

Die Stelle der kurzwelligen Grenze unseres Röntgenkontinuums tritt infolge der Energieverteilung der Ionen ein allmählicher Abfall. Er liegt bei der Wellenlänge

$$\lambda_g = \frac{c}{\nu_g} = \frac{2ch}{3kT} = \frac{0,96}{T} \text{ cm grad,}$$

bei 1 bis 2μ . Dieser Abfall wird sicherlich durch Übergänge zwischen dem kontinuierlichen und dem diskreten Eigenwertspektrum und Übergänge innerhalb des diskreten Eigenwertspektrums überdeckt.

Auf den Absorptionskoeffizienten $\alpha(\lambda, T, p)$ kann man aus (8) ohne weiteres mittels des RAYLEIGHSCHESEN Strahlungsgesetzes schließen.

Die in Rede stehende Strahlung ist zwar im Vergleich zu den anderen Spektralgebieten leicht erdarrten Strahlungsdichten sehr schwach. Trotzdem auch in den neuesten experimentellen Arbeiten im Gebiet der Zehntelmillimeterwellen ein Hochbogen als geeignetste Strahlungsquelle. Daher hier noch kurz auf die praktische Frage eingegangen werden, welche schwarzen Temperaturen die in einem Hochdruckbogen nach außen austretende Strahlung im Gebiet der Zehntelmillimeterwellen mindestens haben kann. Wir legen einen, axialsymmetrischen wandstabilisierten Bogen zu Grunde und betonen die durch die Bogenachse gehende senkrecht zur Achse austretende Strahlung. Könnte man im Bogen eine über den ganzen Querschnitt konstante Temperatur T_0 bis an die Wandung heran erzielen, so würde die schwarze Temperatur T_s der austretenden Strahlung gleich T_0 , vorausgesetzt, daß der Bogen "optisch dick" ist, d. h. daß für den Absorptionskoeffizienten $\alpha(\lambda, T_0, p)$ und den Durchmesser D des Bogens

$$D \cdot \alpha(\lambda, T_0, p) \gg 1 \quad (9)$$

Nun ist aber am Rande des Bogens stets ein Temperaturabfall vorhanden, da die zulässige Temperatur nach oben begrenzt ist. In diesem Gebiet erleidet die aus dem Innern kommende Strahlung Absorptionsverluste, die durch die Emission in kälteren Randschichten nur teilweise ausgeglichen werden. Allerdings ist neuerdings von LARCHÉ und SCHIRMER [6] ein wandstabilisierter Xe-Hochdruckbogen erzeugt und untersucht worden, bei dem über einen großen Teil des Querschnitts eine konstante Temperatur und ein sehr steiler Temperaturabfall am Rande vorhanden ist¹. Es entsteht die Frage, wie steil der Abfall sein muß, damit die schwarze Temperatur der austretenden Strahlung wesentlich herabgesetzt wird. Bezeichnet man mit r den Abstand von der Bogenachse und mit R den inneren Radius des Rohres, so kann man die Temperaturverteilung über den Querschnitt durch

$$T(r) = T_0 \left(1 - e^{-\frac{R-r}{\delta}} \right), \quad (10)$$

Vgl. SCHIRMER [6], Abb. 3.

annähern, wo $\delta \ll R$ ist und eine für die Steilheit des Temperaturabfalls am Rande maßgebende Länge bezeichnet. Die Temperatur in der Bogenachse ist nahezu gleich T_0 . Wir teilen dann den Querschnitt des Bogens in einen „homogenen Teil“ und ein „Randgebiet“ ein und legen die Grenze an diejenige Stelle, an der die Temperatur bis auf etwa $0,95 T_0$ abgesunken ist. Das ist der Fall für $R - r = 3\delta$. Nun ist der Absorptionskoeffizient¹ für ein beliebiges r

$$\alpha(\lambda, T(r), p) = \alpha(\lambda, T_0, p) \frac{T_0}{T(r)} e^{-\frac{U}{k} \left(\frac{1}{T(r)} - \frac{1}{T_0} \right)} \quad (11)$$

und die Durchlässigkeit des Randgebietes

$$\mathfrak{D}(\lambda, p) = e^{-\int_{R-3\delta}^R \alpha(\lambda, T(r), p) dr}$$

Das Integral hat, wie man leicht abschätzt, die Größenordnung $\delta \cdot \alpha(\lambda, T_0, p)$ und hängt nicht sehr wesentlich ab von der etwas willkürlichen Festsetzung der Grenze Randgebiet-homogener Teil.

Wenn nun im Randgebiet keine beträchtliche Absorption stattfindet, also $\mathfrak{D}(\lambda, p) \simeq 1$ sein soll, so muß

$$\delta \cdot \alpha(\lambda, T_0, p) \ll 1 \quad (12)$$

sein.

Für den oben erwähnten Xe-Bogen ($T_0 = 6930^\circ$, $p = 25$ at, Durchmesser D des homogenen Teils $D = 0,56$ cm, $\delta = 0,02$ cm) wurden die schwarzen Temperaturen² der aus dem Bogen austretenden Strahlung (ohne Wandverluste) berechnet, sowie die Absorptionskoeffizienten $\alpha(\lambda, T_0, p)$ und die in den Bedingungen (9) und (12) auftretenden Größen $D \cdot \alpha(\lambda, T_0, p)$ und $\delta \cdot \alpha(\lambda, T_0, p)$.

Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle enthalten.

λ in cm	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
T_s	5550°	4990°	3990°	3550°	3540°
T_s/T_0	0,80	0,72	0,58	0,51	0,51
$\alpha(\lambda, T_0, p)$ in cm^{-1}	4,4	17,6	39,6	70,4	110
$D \cdot \alpha(\lambda, T_0, p)$	2,46	9,9	22,2	39,4	61,5
$\delta \cdot \alpha(\lambda, T_0, p)$	0,088	0,352	0,792	1,41	2,20

Man erkennt, daß die schwarzen Temperaturen der austretenden Strahlung gegenüber der Achsentemperatur des Bogens um so stärker herabgesetzt sind, je länger die Wellenlänge ist. In der Tat sind bei $\lambda = 0,01$ cm die beiden Bedingungen (9) und (12) einigermaßen erfüllt, während bei den längeren Wellen (9) immer besser, (12) jedoch schlecht oder gar nicht erfüllt ist. Die Steilheit des Temperaturabfalls ist also für den hier verfolgten Zweck nur bei der kürzesten Wellenlänge ausreichend, während andererseits bei den längeren Wellen ein wesentlich kleinerer Durchmesser des Bogens genügen würde, um ihn „optisch dick“ zu machen.

Ein Vergleich mit den früher betrachteten Bögen mit parabolischer Temperaturverteilung, zeigt, daß durch den steilen Abfall der Plasma-Temperatur am

¹ Vgl. HETTNER [1], Formel (2).

² Vgl. HETTNER [1], Formeln (7) und (8).

Rande des Bogens ein wesentlicher Vorteil hinsichtlich der schwarzen Temperatur der austretenden Strahlung nur bei den kürzeren Wellen erzielt wird.

Zusammenfassung.

Die Emission eines Hochdruckplasmas im langwelligeren Ultrarot, die durch die Beschleunigung der Elektronen im Felde der Ionen entsteht, wird unmittelbar aus den bekannten Formeln für die Intensität des Röntgenbremsspektrums abgeleitet. Außerdem wird

die Schwächung untersucht, die die aus einem Hochdruckbogen austretende Strahlung durch die Absorption in den kälteren Randschichten des Bogens erfährt.

Literatur. [1] HETTNER, G.: Z. Physik **131**, 385 (1952). [2] Vgl. SOMMERFELD, A.: Atombau und Spektrallinien, 7. Kap., § 8, Formeln (7), (8), (8e). — [3] SCHULZ, P. u. W. WEIZEL: Z. Physik **122**, 697 (1944). — [4] UNSÖLD, Ann. Phys. (5) **33**, 607 (1938). — [5] LARCHÉ, K.: Z. Phys. **174** (1953). — SCHIRMER, H.: Z. Physik **136**, 87 (1953).

Professor Dr. GERHARD HETTNER, Institut für Theoretische Physik der Technischen Hochschule München.

Über die Elektronenemission von kalten Metalloberflächen bei mittleren Feldstärken ($\sim 10^4$ V/cm).*

Von KARL KERNER und HEINZ RAETHER, Hamburg.

Mit 2 Textabbildungen.

(Eingegangen am 23. Dezember 1953.)

Die Elektronenemission aus kalten Metalloberflächen unter der Wirkung eines elektrischen Feldes („Feldemission“) wird bekanntlich erst bei Feldstärken über 10^7 Volt/cm meßbar. Genaue hierüber vorliegende Beobachtungen von HAEFER [1] an einer ausgeheizten Wolframspitze in sehr gutem Vakuum ($< 10^{-7}$ Torr) sind in Übereinstimmung mit den theoretischen Ergebnissen von FOWLER und NORDHEIM [2].

Abb. 1.
Versuchsanordnung zur Messung der Elektronenemission einer kalten Metalloberfläche im ebenen Feld (Druck $< 10^{-5}$ Torr). Der Nachweis der Elektronen erfolgt mit Hilfe eines Zählrohrs, welches sich über der Anode befindet.

In diesem Zusammenhang seien Beobachtungen mitgeteilt, die zeigen, daß nicht ausgeheizte Metallflächen bei Zimmertemperatur schon bei einer Feldstärke von 10^4 V/cm meßbar, d. h. hier

$I > 10^{-16}$ A, Elektronen emittieren können.

Die Versuchsanordnung war folgende: An zwei parallele Metallplatten aus Eisen wird eine konstante Spannung von 45 kV angelegt. Der Abstand der Platten ist veränderlich. Die Anode ist durchbohrt (Öffnung etwa 10^{-2} cm²), so daß die aus der Kathode austretenden Elektronen hinter der Anode nachgewiesen werden können. Dazu dient ein mit einem dünnen Glimmerfenster bedecktes Zählrohr (Abb. 1). Die ganze Anordnung befindet sich in einem Rezipienten, der über Öldampffänger („baffles“) an eine Öldiffusionspumpe (Leybold OT 100) angeschlossen ist. Die Versuche wurden bei einem Druck kleiner als 10^{-5} Torr ausgeführt.

Die Kathode wurde trocken abgedreht und nicht weiter behandelt. Besonderer Wert wurde darauf gelegt, daß keine Verunreinigungen (u. a. z. B. durch Berührung) der Kathodenoberfläche stattfanden. An einer solchen Fläche zeigt die Elektronenemission in Abhängigkeit von der Feldstärke die in Abb. 2 dargestellte Kurve. Die Emission ist örtlich konstant, wie man durch seitliches Verschieben der Kathode gegenüber der Bohrung in der Anode feststellt. Ein zeitliches Abklingen der Emission konnte im Verlauf von fünf Stunden nicht beobachtet werden.

Diese Elektronenemission kann nun durch Behandlung im Vakuum stark verändert werden:

Läßt man bei abgeschlossenem Rezipienten zwischen Anode und Kathode dieser Versuchsanordnung eine Glimmentladung brennen (30 min; 0,5 Torr Luft)

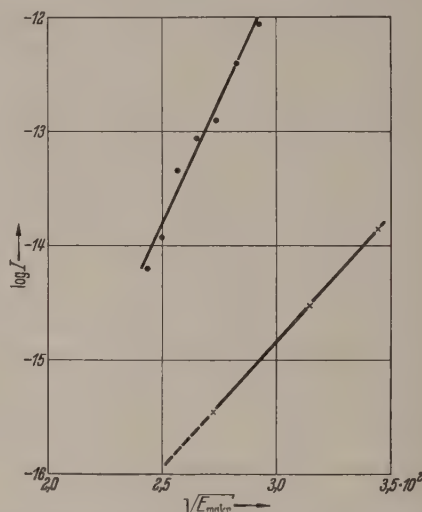


Abb. 2. Abhängigkeit der Elektronenemission I [A] einer Eisenkathode von der angelegten Feldstärke E [V/cm].
Obere Kurve: Kathode trocken abgedreht und nicht weiter behandelt.
Untere Kurve: Kathode nach einer Gasentladung.

0,5 mA/cm²), so zeigt sich nach erneuter Evakuierung, daß die örtlich konstante Emission um den Faktor 10⁴ geringer geworden ist (Abb. 2).

Bedampft man nach einer Gasentladung die Kathode im gleichen Vakuum mit Kupfer oder Gold, so mißt man eine bis zum 10⁴-fachen höhere Emission. Desgleichen steigt die Emission bedeutend an, wenn die Kathode nach einer Gasentladung mit einer Rasiervorteilung im gleichen Vakuum geschabt wird. Sie ist dann allerdings örtlich nicht mehr konstant.

Es ist wichtig zu bemerken, daß, wenn die Messung an einer frisch eingebrachten Fläche vorgenommen wird, sich schon bei $1 \cdot 10^4$ Volt/cm eine starke, zeitliche und örtlich ungleichmäßige Emission zeigt, die von kleinen Funken an der Kathodenoberfläche begleitet ist. Wenn aber an die Kathode einige Minuten lang eine Feldstärke gelegt wird, die größer als die während der Messung anliegende ist, so erhält man eine zeitliche und örtlich gleichmäßige Abhängigkeit der Emission von der Feldstärke, wie sie in Abb. 2 oben dargestellt ist.

Um den Vorgang zu verstehen, wird man ihn mit den bekannten Formeln zu beschreiben versuchen. Die

* Herrn Prof. Dr. G. Joos zum 60. Geburtstag.

gebnisse sollen einerseits an der FOWLER-NORD-Gleichung (1), andererseits an der SCHOTTKY-Gleichung (2) diskutiert werden.

Die FOWLER-NORDHEIM-Gleichung lautet

$$3,2 \cdot 10^{-6} \frac{\mu^{\frac{1}{2}}}{(\mu + W) W^{\frac{1}{2}}} \cdot E^2 \cdot F e^{-\frac{6,85 \cdot 10^7 \cdot W^{\frac{3}{2}}}{E}} \quad (1)$$

bedeutet I den Gesamtstrom in A, W die Austrittsarbeit in eV, F die emittierende Fläche in cm^2 , E die Feldstärke in Volt/cm und μ die Fermi-Konstante. Trägt man $\log I/E^2$ über $1/E$ auf, so liefert das Diagramm Geraden, aus deren Neigung W und aus dem Achsenabschnitt F zu bestimmen ist. Die obere Gerade in Abb. 2 liefert dann die Werte $W = 5 \cdot 10^{-2} \text{ eV}$ und $F = 6 \cdot 10^{-14} \text{ cm}^2$. Man kann zwar durch Annahme einer mikroskopischen Rauigkeit, die die Feldstärke an den Spitzen erhöht — also $E_{\text{mikt.}} = m E_{\text{makr.}}$, $m \geq 1$ — größere Werte für W erhalten, wobei allerdings der Wert von F kleiner wird. Für den kleinsten physikalisch sinnvollen Wert $F = 10^{-15} \text{ cm}^2$ erhält man aber W nicht mehr als 0,2 eV. Setzt man $W = 0,2 \text{ eV}$ in die SCHOTTKY-Gleichung (2) für $E = 0$ (RICHARDSON-Gleichung) ein, so müßten bei Zimmertemperatur schon Ströme $> 10^{-10} \text{ A}$ gemessen werden.

Da diese Emission aber nicht beobachtet wird, kann man nahe, statt (1) die von SCHOTTKY hergeleitete Gleichung

$$I = A F T^2 e^{-\frac{1}{kT} (W - 3,79 \cdot 10^{-4} \sqrt{W})} \quad (2)$$

anzuziehen. Die Gl. (2) liefert im Diagramm $\log I/\sqrt{E}$ für $T = \text{const}$ Geraden¹, aus deren Neigung W bestimmen kann und deren Achsenabschnitt im Diagramm eine Funktion von W ist. Für den Fall $W = 0$ erhält man Werte der Größenordnung 10 . Die Proportionalitätskonstante A und die emittierende Fläche F sind dann zu bestimmen.

Eine Entscheidung, ob die Meßpunkte beim Auftragen von $\log I/E^2$ über $1/E$ (NORDHEIM-FOWLER-Gleichung) oder von $\log I$ über \sqrt{E} (SCHOTTKY-Gleichung) Geraden geben, kann sich infolge der Streuung der Meßwerte nicht treffen.

können nur in Grenzen angegeben werden und zwar $A: 10^{-4} \div 10^4 \text{ A/cm}^2 \text{ Grad}^2$ und $F = 10^{-2} \text{ cm}^2$ (Anodenöffnung) $\div 10^{-10} \text{ cm}^2$, so daß $10^{-14} < A \cdot F < 10^2$. Die Austrittsarbeit W ergibt sich innerhalb dieser Grenzen zu $1 \div 2 \text{ eV}$, z. B. $W = 1,6 \text{ eV}$ für $A = 1$ und $F = 10^{-4} \text{ cm}^2$.

Offenbar läßt sich die Beobachtung durch die SCHOTTKY-Gl. (2) am besten beschreiben. Danach erfolgt die Emission von Zentren erniedrigter Austrittsarbeit ($1 \div 2 \text{ eV}$ gegen $4,8 \text{ eV}$ des reinen Eisens). Durch die oben geschilderte Behandlung wird diese Austrittsarbeit stark verändert. Insbesondere ist bemerkenswert, daß die Erzeugung frischer Oberflächen (aufgedampfte und geschabte Fläche) die Emission heraufsetzt¹.

Die Beobachtungen zeigen den engen Zusammenhang der kalten Elektronenemission mit dem Entstehen des Vakuumfunken sowie ihre Bedeutung für alle Apparaturen, bei denen nicht ausheizbare Hochspannungselektroden verwendet werden.

Zusammenfassung.

Die vorliegende Arbeit enthält einige Beobachtungen über die Elektronenemission von kalten, nicht ausgeheizten Metalloberflächen bei Drucken $< 10^{-5}$ Torr in Abhängigkeit von der angelegten Feldstärke im ebenen Feld. Es zeigt sich eine starke Abhängigkeit von der Behandlung der Kathode (Bedampfen, Schaben und Gasentladung). Die Beschreibung der Vorgänge mit Hilfe der SCHOTTKY-Gleichung liefert Werte der Austrittsarbeit von $1 \div 2 \text{ eV}$.

Literatur. [1] HAEFER, R.: ZS.f. Phys. **116**, 604 (1940). — [2] FOWLER, R. H. und L. NORDHEIM: Proc. Roy. Soc. A **119**, 173 (1928). — [3] SCHOTTKY, W.: Z. f. Phys. **14**, 80 (1923).

Cand. phys. KARL KERNER, Prof. Dr. HEINZ RAETHER, Institut für Angewandte Physik der Universität Hamburg, Hamburg 36, Jungiusstraße 11.

¹ Eine ausführliche Darstellung der Versuche erfolgt an anderer Stelle.

Ladungstransport-Gerät als hoher Ohmscher Widerstand*.

Von WALTHER KOSSEL, F. LEONHARD und P. VOLK, Tübingen.

Mit 4 Textabbildungen.

(Eingegangen am 27. Dezember 1953.)

Widerstände der Größenordnung einer statischen Ladung ($\sim 10^{12} \text{ Ohm}$) werden für elektrostatische Aufladungen, vor allem zur Messung kleiner Ströme in Elektrometerschaltungen, öfter gebraucht. Feste Widerstände dieser Größe zeigen manche technischen Schwächen; bei den früher angewandten Halbleiterstäben variiert sich der Widerstand mit der Belastung, aufgedampfte dünne Metallschichten sind mechanisch und elektrisch empfindlich und ändern sich meist im Laufe der Zeit. Wir haben daher das Arbeiten einer kontinuierlich mechanischen Ladungsübertragung untersucht.

Bei Bewegung eines Konduktors der Kapazität C_k gegen einen zum anderen Pol einer Stromquelle der Spannung U wird die Ladung $q = C_k U$ übertragen.

Herrn Prof. Dr. G. Joos zum 60. Geburtstag gewidmet.

Wiederholt man die Bewegung periodisch mit der Frequenz n , so wird die in der Zeit t transportierte gesamte Ladung $Q = n C_k \cdot U \cdot t$, d. h. es fließt ein mittlerer Strom

$$dQ/dt = I = n C_k U = U/R. \quad (1)$$

Die Stromleitung gehorcht also dem OHMSchen Gesetz mit einem Leitwert $n C_k$, d. i. dem Ersatzwiderstand

$$R = 1/(n C_k). \quad (2)$$

Mit $n = 1 \text{ sec}^{-1}$ und $C_k = 1 \text{ cm}$ ist der effektive Widerstand $1 \text{ CGS} = 9 \cdot 10^{11} \text{ Ohm}$. (Man verwirklicht, mag man sagen, unmittelbar die Dimension des Leitwerts $\frac{\text{Kapazität}}{\text{Zeit}}$ — die CGS-Einheit des Leitwerts ist $1 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$).

2. Um dies Prinzip zu realisieren, wurden zwei Vorrichtungen untersucht. Die übertragenden Konduktoren waren zunächst auf einer kreisrunden Scheibe aus isolierendem Material befestigt, die auf der Achse eines Synchronmotors sitzt („Ladungs-Schöpfrad“). Später wurden sie, um die stets auf den Isolator übergehenden und dort verbleibenden Kriechladungen zu vermeiden, frei — mittels magnetischer Kräfte — zwischen den Kontakten hin und her bewegt („Ladungsbagger“).

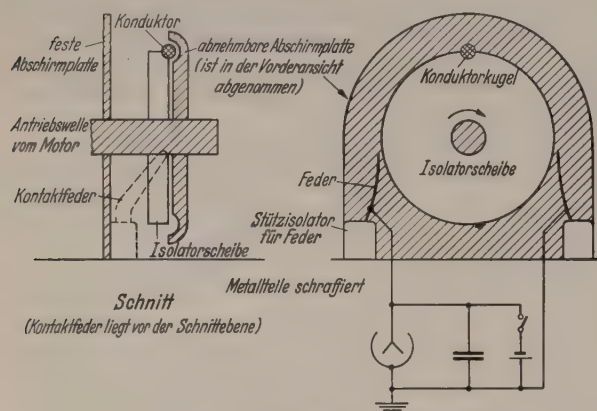


Abb. 1. Gerät mit geführtem Ladungsträger.

Abb. 1 zeigt schematisch das „Schöpfrad“. Die metallene Schutzhülle kann mit einer Feinverschiebung der Kugel von einer Seite her eng genähert werden, um deren Kapazität steigern und so den Leitwert des Geräts etwa im Verhältnis 1:2 stetig im Betriebe fein

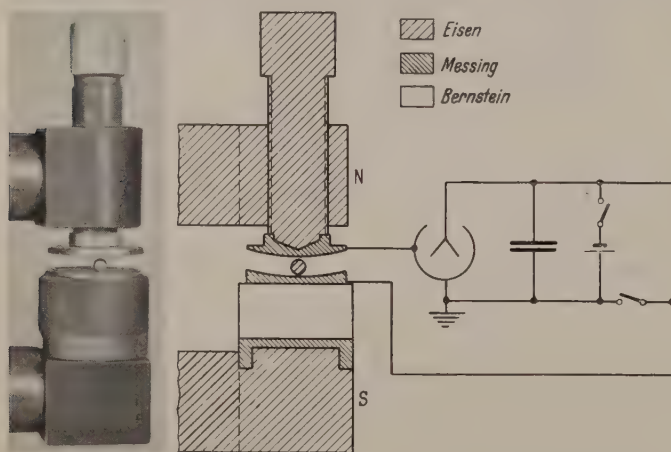


Abb. 2. Gerät mit frei bewegtem Ladungsträger.

regeln zu können. Eine weitere unmittelbare Änderung erlaubt die Drehzahl, — der benutzte Synchronmotor kann wahlweise mit 100 min^{-1} oder 50 min^{-1} betrieben werden.

Im zweiten Gerät wird (Abb. 2) eine ferromagnetische Kugel abwechselnd durch einen Spitzpol nach oben gezogen und wieder losgelassen. Die Kontaktflächen sind so gewölbt, daß sie einen Ausschnitt aus einem flachen Kugelkondensator bilden; die untere verhindert so als Hohlkugel den Transportkugel daran, seitlich heraus zu rollen. Der Elektromagnet, dessen Pole in der Figur sichtbar sind, erhält aus einer Batterie durch ein mittels Synchronmotor betriebenes Kontaktrad Stromstöße, die gerade so bemessen sind, daß die Kugel die obere Kontaktplatte in der zur Verfügung stehenden Zeit (z. B. 160 msec) sicher erreicht.

Es ist erwünscht, die Stöße so sanft wie möglich halten.

In der zweiten Figur ist dem Schema des Apparats unmittelbar eines der Meßschaltung angehängt. Vorne interessiert, ist vor Allem die stetige Entladung einer Kapazität C — eines statischen Meßinstruments — über den Widerstand. Gehorcht er dem OHMSchen Gesetz, so findet sich die bekannte Abnahme der Spannung nach einer e -Funktion

$$U = U_0 \exp \left\{ -\frac{t}{RC} \right\}.$$

Eine Darstellung des beobachteten Spannungsabfalls mit der Zeit erlaubt also, indem man $\log U$ als Funktion der Zeit aufträgt, die Geradlinigkeit des Verlaufs zu prüfen, an der Geradenheit des Verlaufs zu prüfen, wie weit von einer Konstanz des effektiven Widerstands R die Rede sein kann. Die Abbildungen zeigen die Beobachtungen.

3. Was man zu fürchten hat, sind Kontaktsprünge. Sie werden sich, da sie höchstens die Ordnung von 1 Volt erreichen, im üblichen Bereich statischer Instrumente um 150—250 Volt praktisch nicht geltend machen. In der Tat arbeitet die Ladungsträgerübertragung dort — es wurde bis 220 Volt beobachtet — einwandfrei linear.

Die wichtigste experimentelle Kontrolle wird auf die Beobachtung an Instrumenten mit Hilfspulsen gehen, deren Empfindlichkeit so hoch ist, daß die Meßelektrode Spannungen bis zu geringen Bruchteilen von Volt herab beobachtet werden können und zur Messung benutzt werden. Die Sorgfalt galt also dem Spannungsabfall solcher Elektroden im Gebiet der kleinsten Werte. Ein DOLEZALEKSches Quadrantelektrometer wurde benutzt.

Tabelle 1 zeigt an Zahlen vom zweiten Gerät, wie die aus der Neigungstangente berechneten

Tabelle 1. Effektiver Widerstand R bei Verwendung von Konduktorkugeln mit 3 mm Durchmesser.

Kugelhöhe	Kugelfrequenz	Abstand	R
Zweites Gerät (Ladungsbagger).			
1	200 min^{-1}	3,03 mm	$0,3 \cdot 10^{12}$
1	100 min^{-1}	3,03 mm	$0,6 \cdot 10^{12}$
1	100 min^{-1}	4,00 mm	$1,4 \cdot 10^{12}$
1	50 min^{-1}	4,00 mm	$2,8 \cdot 10^{12}$

Widerstände in der Tat ausfallen. Dabei ist ein Kugel von 3,00 mm Durchmesser verwendet. Ihre Hubhöhe ist also beim Plattenabstand $a = 3,03 \text{ mm}$ nur $1/30 \text{ mm}$, bei $a = 4,00 \text{ mm}$ beträgt sie $1,00 \text{ mm}$. Bezeichnend ist vor Allem die damit eintretende Änderung der Kapazität, auf der die Feinregulierung des effektiven Widerstands beruht: die frei stehende Kugel würde $C_k = r = 0,15 \text{ cm}$ zeigen, für $a = 4,00 \text{ mm}$ findet man aus R_{eff} und n eine Erhöhung auf 0,19 cm, für $a = 3,03 \text{ cm}$ aber auf 0,45 cm — die Fassungskraft und damit der effektive Leitwert sind aufs dreifache angewachsen.

Die Abbildungen zeigen wie erwartet, daß der Verlauf für Spannungen unter 1 Volt von der logarithmischen Geraden abweicht — eine Grenze U_0 des Linearbereichs, an der die Abweichung 5% der linearen zu erwartenden Spannung überschreitet und eine Endspannung U_e lassen sich ablesen. Hier, im Felde der Kontaktspannungen, wird das Material entscheidend. Tabelle 2 zeigt Beobachtungen.

anderen Beweis, der unmittelbar auf der allgemeinen Formulierung des Nachwirkungsprinzips und der Eigenschaft der Isotropie aufbaut.

Zur Bezeichnung bemerken wir zunächst, daß wir die Komponenten des Dehnungstensors wahlweise ε_{11} , ε_{22} , ε_{33} , ε_{23} , ε_{13} , ε_{12} und in derselben Reihenfolge ε_1 , ε_2 , ε_3 , ε_4 , ε_5 , ε_6 nennen. Entsprechendes gilt für den Spannungstensor.

Der lineare Zusammenhang zwischen den Komponenten des Spannungs- und des Dehnungstensors lautet nach der Nachwirkungstheorie [2] allgemein

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i(t) &= \sum_{k=1}^6 c_{ik} \varepsilon_k(t) - \\ &- \int_0^\infty \sum_{k=1}^6 Q_{ik}(u) \varepsilon_k(t-u) du \quad (i=1, 2, \dots, 6), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

falls wir uns auf isotherme oder adiabatische Verhältnisse beschränken. c_{ik} ist der elastische Tensor vierter

Stufe bei Hemmung der Nachwirkung, $c_{ik} - \int_0^\infty Q_{ik}(u) du$

ist der elastische Tensor für zeitlich konstante Dehnungen ε_i nach Abklingen der Nachwirkung. Die $Q_{ik}(u)$ sind Nachwirkungsfunktionen (= Nachwirkungstensor); sie geben an, mit welchen Gewichten die Dehnungswerte ε_k zu früheren Zeiten $t-u$ in die Spannungen zur Zeit t eingehen. Die $Q_{ik}(u)$ können auch uneigentliche Funktionen sein, also Funktionen vom Typ der DIRACschen δ -Funktion enthalten, müssen aber im Intervall $0 \leq u \leq \infty$ wenigstens integrierbar sein (vgl. [3]).

(1) setzt neben dem Superpositionsprinzip nur die Invarianz der Spannungsdehnungsbeziehung gegen eine Verschiebung der Zeitskala und die selbstverständliche Forderung, daß $\sigma_i(t)$ nicht von den Dehnungswerten zu späteren Zeiten abhängen darf, voraus. Die weitere, ebenso selbstverständliche Forderung, daß auch $\varepsilon_k(t)$ nicht von den Spannungswerten zu späteren Zeiten abhängen darf — man denke sich dazu (1) nach $\varepsilon_i(t)$ aufgelöst —, gibt Einschränkungen für die zuzulassenden Nachwirkungsfunktionen $Q_{ik}(u)$, auf die wir aber hier nicht einzugehen brauchen.

Bei einer beliebigen Drehung des Koordinatensystems muß die Spannungsdehnungsbeziehung (1) des isotropen Körpers kovariant bleiben. Wird dabei ε_i in ε'_i und σ_i in σ'_i transformiert, so muß daher (1) auch mit ε'_i , σ'_i an Stelle von ε_i , σ_i gelten. Sei der Zusammenhang zwischen den ursprünglichen und den neuen Größen durch

$$\sigma_i = \sum_{k=1}^6 A_{ik} \sigma'_k, \quad \varepsilon_i = \sum_{k=1}^6 B_{ik} \varepsilon'_k \quad (i=1, 2, \dots, 6)$$

gegeben, so kann man mit ihm von den neuen Größen in der transformierten Spannungsdehnungsbeziehung auf die ursprünglichen zurückrechnen und erhält

$$\begin{aligned} \sigma_i(t) &= \sum_{k,l,m=1}^6 A_{ik} c_{klm} B_{lm} \varepsilon_m(t) - \\ &- \int_0^\infty \sum_{k,l,m=1}^6 A_{ik} Q_{klm}(u) B_{lm} \varepsilon_m(t-u) du \end{aligned}$$

und durch Vergleich mit (1) für beliebige Funktionen $\varepsilon_m(t)$ und für beliebige Drehungen A_{ik} , B_{km} des Koor-

dinatensystems die Identität

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^6 \left(\sum_{k,l=1}^6 A_{ik} c_{klm} B_{lm} - c_{im} \right) \varepsilon_m(t) &= \\ = \int_0^\infty \sum_{m=1}^6 \left(\sum_{k,l=1}^6 A_{ik} Q_{klm}(u) B_{lm} - Q_{im}(u) \right) \varepsilon_m(t-u) du \end{aligned}$$

Für einen beliebig kurzzeitigen Dehnungsimpuls w die rechte Seite beliebig klein und daraus schließt man auf

$$\sum_{k,l=1}^6 A_{ik} c_{klm} B_{lm} - c_{im} = 0.$$

Setzt man andererseits $\varepsilon_m(t) = a_m e^{i\omega t}$ (ω = beliebig reell), so folgt nach dem Fourierschen Integraltheorem

$$\sum_{k,l=1}^6 A_{ik} Q_{klm}(u) B_{lm} - Q_{im}(u) = 0.$$

Beide Beziehungen (2) und (3) gelten für beliebige Drehungen des Koordinatensystems und die ihnen zugeordneten Transformationsmatrizen A_{ik} und B_{lm} auf deren einfachen Zusammenhang wir im übrigen nicht einzugehen brauchen. Genau wie in der klassischen Elastizitätstheorie folgert man hieraus, daß $c_{11} = c_{22} = c_{33}$, $c_{12} = c_{21} = c_{13} = c_{31} = c_{23} = c_{32}$, $c_{44} = c_{55} = c_{66} = \frac{c_{11} - c_{12}}{2}$, während alle anderen c_{ik} verschwinden. Dieselbe Schlußweise auf (3) angewandt führt auf die gleichen Beziehungen zwischen den Nachwirkungsfunktionen $Q_{ik}(u)$. Die Symmetrieeigenschaft $c_{ik} = c_{ki}$, $Q_{ik}(u) = Q_{ki}(u)$ folgt hier allein aus der Isotropie. Die Spannungsdehnungsbeziehung (1) läßt sich daher in zwei getrennte Beziehungen für alleseitigen Druck und für Schub mit zwei Nachwirkungsfunktionen $Q_1(u)$ und $Q_2(u)$ aufspalten. Schreibe wir

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma, \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon,$$

$$\sigma_{ik} - \frac{1}{3} \sigma \delta_{ik} = \sigma'_{ik}, \quad \varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \varepsilon \delta_{ik} = \varepsilon'_{ik},$$

so lautet (1)

$$\sigma(t) = (c_{11} + 2c_{12}) \varepsilon(t) - \int_0^\infty Q_1(u) \varepsilon(t-u) du, \quad (4)$$

$$\sigma'_{ik}(t) = (c_{11} - c_{12}) \varepsilon'_{ik}(t) - \int_0^\infty Q_2(u) \varepsilon'_{ik}(t-u) du. \quad (5)$$

Diese Gleichungen gelten bei isothermen oder adiabatischen Bedingungen, wenn wir unter den c_{ik} die isothermen oder die adiabatischen elastischen Konstanten und unter den $Q_{ik}(u)$ die isothermen oder die adiabatischen Nachwirkungsfunktionen verstehen.

Kompliziertere Bedingungen lassen sich ebenfalls mit der Nachwirkungstheorie erfassen. Es ist aber dann notwendig, neben der Dehnungsvorgeschichte noch die Temperaturvorgeschichte zu berücksichtigen und nicht nur für die Spannungen, sondern auch für die Entropie einen Ansatz analog zu (1) zu machen. Bezeichnen wir mit s die spezifische Entropie, mit T die absolute Temperatur, so gilt in Verallgemeinerung von (4) und (5) in der Umgebung einer Temperatur T_0 bei der die Dehnungen im spannungsfreien Gleichgewicht gleich Null gesetzt seien, unter Berücksichtigung der Isotropie

$$\begin{aligned} s(t) - s_0 &= \alpha [T(t) - T_0] + \int_0^\infty R_1(u) [T(t-u) - T_0] du \\ &+ \beta \varepsilon(t) + \int_0^\infty R_2(u) \varepsilon(t-u) du, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} &= \gamma(T - T_0) + \int_0^\infty R_3(u) [T(t - u) - T_0] du \\ &+ (c_{11} + 2c_{12}) \varepsilon(t) - \int_0^\infty Q_1(u) \varepsilon(t - u) du, \end{aligned} \quad (7)$$

rend (5) bestehen bleibt. R_1, R_2, R_3 sind drei wei-
Nachwirkungsfunktionen. Sie hängen ebenso wie
und Q_2 und α, β, γ noch von T_0 ab. Hierin bedeutet
(u) ersichtlich die isotherme Nachwirkungsfunk-
. Der Zusammenhang zwischen ihr und der ent-
sprechenden adiabatischen Nachwirkungsfunktion er-
sicht, wenn man $s(t) = s_0$ setzt, aus (6) $T - T_0$
chnet und in (7) einsetzt. Dies kann über eine
lace-Transformation von (6) geschehen. $Q_2(u)$ ist
eich isotherme und adiabatische Nachwirkungs-
funktion, was daraus hervorgeht, daß (5) die Tempera-
T nicht enthält.

Die thermodynamische Theorie der Relaxations-
erscheinungen macht noch eine weitere Aussage über
Gestalt von (6) und (7). Aus thermodynamischen
Relationen folgt mit ρ = Dichte unmittelbar

$$\rho \beta = -\gamma, \quad \rho R_2(u) = -R_3(u). \quad (8)$$

dürfte kaum möglich sein, diesen Zusammenhang
der Nachwirkungstheorie herzuleiten, da er auf der
stanz einer freien Energie, die nur von den Variab-
des augenblicklichen Zustandes abhängt, beruht
eine solche ohne Eingehen auf die inneren Variab-
des Systems im Rahmen der üblichen Nachwir-
kungstheorie wohl nicht in plausibler Weise definiert
den kann.

Eine weitere Bemerkung ist über die Symmetrie
Nachwirkungstensors $Q_{ik}(u)$ zu machen. Für den
tischen Tensor c_{ik} folgt die Symmetrie in der klas-
schen Weise, wenn man sich die Nachwirkung ge-
umt denkt im Sinne der gehemmten thermodyna-
mischen Gleichgewichte; ebenso folgt die Symmetrie
elastischen Tensors nach Abklingen der Nachwir-
g, d. h. bei währendem Gleichgewicht:

$$c_{ik} - \int_0^\infty Q_{ik}(u) du = c_{ki} - \int_0^\infty Q_{ki}(u) du.$$

in isotropen Körper folgen diese Symmetrieeigen-
schaften mit der weiteren

$$Q_{ik}(u) = Q_{ki}(u) \quad (9)$$

er schon allein aus der Isotropie. Bei kristallinen
kern beliebiger Struktur dürfte sich die Symme-
trieeigenschaft $Q_{ik} = Q_{ki}$ im Rahmen der allgemeinen
Nachwirkungstheorie herleiten zu lassen. Den
und hierfür muß man darin sehen, daß in der enge-
thermodynamischen Relaxationstheorie sich zwar
gemein für beliebige Kristallsysteme $Q_{ik} = Q_{ki}$ be-
weisen läßt, daß aber in den Beweis wesentlich die
ONSAGERSchen Reziprozitätsbeziehungen [5] für die
ersten Umwandlungen eingehen. Eigenschaften wie
die zwar einfachen, aber ihrer Ursache nach doch

recht tief liegenden ONSAGERSchen Reziprozitätsbe-
ziehungen darstellen, sind aber in den üblichen Grund-
annahmen der Nachwirkungstheorie nicht enthalten.
Tatsächlich lassen sich die Symmetrieeigenschaften
[8] und [9], wie wir an anderer Stelle zeigen werden,
aus der GREENE-CALLENschen Erweiterung der ON-
SAGERSchen Reziprozitätsbeziehungen [6] begründen.
Im übrigen liegt hier neben dem Leitfähigkeitstensor
in Metalleinkristallen [7] ein weiteres Beispiel dafür
vor, daß der Inhalt der ONSAGERSchen Reziprozitäts-
beziehungen durch vorliegende räumliche Symmetrien
schon ganz oder zum Teil vorweggenommen wird.

Eine Zerspaltung der Spannungs-Dehnungsbezie-
hung ist auch bei Vorliegen geringerer Symmetrien
möglich. So zerfällt (1) bei kubischen Kristallen in

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= (c_{11} + 2c_{12}) \varepsilon(t) - \int_0^\infty Q_1(u) \varepsilon(t - u) du, \\ \sigma^\pm(t) &= (c_{11} - c_{12}) \varepsilon^\pm(t) - \int_0^\infty Q_2(u) \varepsilon^\pm(t - u) du, \\ \sigma_{ik}(t) &= c_{44} \varepsilon_{ik}(t) - \int_0^\infty Q_3(u) \varepsilon_{ik}(t - u) du \end{aligned} \quad (i \neq k)$$

mit $\sigma^+ = \sigma_1 + P \sigma_2 + P^2 \sigma_3$, $\sigma^- = \sigma_1 + P^2 \sigma_2 + P \sigma_3$,
 $P = \exp \frac{2\pi i}{3}$ und analog definierten ε^+ und ε^- . Doch
soll hierauf in anderem Zusammenhang näher ein-
gegangen werden.

Zusammenfassung.

Die Spannungs-Dehnungsbeziehung in einem iso-
tropen Medium mit elastischer Nachwirkung läßt sich
allgemein in eine solche für allseitigen Druck und in
eine solche für Schub zerlegen. Dieser Zerlegung ent-
sprechen genau zwei Nachwirkungsfunktionen, die im
übrigen noch von den Bedingungen, unter denen die
Nachwirkung erfolgt, ob isotherm oder adiabatisch,
abhängen. Entsprechende Zerlegungen lassen sich
auch für die elastische Nachwirkung in Kristallen
durchführen. Die Nachwirkungstheorie wird dann so
verallgemeinert, daß sie auch die Temperaturvorge-
schichte erfaßt, und es wird die Frage angeschnitten, ob
man gewisse Beziehungen zwischen den Nachwirkungs-
funktionen und die Symmetrie des Nachwirkungsten-
sors, welche aus der spezielleren thermodynamischen
Theorie der Relaxationerscheinungen folgen, auch im
Rahmen der allgemeinen Nachwirkungstheorie als
gültig ansehen darf.

Literatur. [1] MEIXNER, J.: Z. Naturforschung **4a**, 594
(1949). — [2] Vgl. z. B. die zusammenfassende Darstellung von
B. GROSS: Mathematical Structure of Theories of Linear Vis-
coelasticity, Paris 1953. — [3] MEIXNER, J.: Kolloid-Z. **134**,
3 (1953). — [4] SIPS, R.: J. Polymer Science **7**, 191 (1951). —
[5] ONSAGER, L.: Phys. Rev. **37**, 405 u. **38**, 2265 (1931). —
[6] GREENE, R. F. und H. B. CALLEN: Phys. Rev. **88**, 1387
(1952). — [7] MEIXNER, J.: Ann. Physik (5), **40**, 165 (1941).

Prof. Dr. J. MEIXNER,

Institut für theoretische Physik der Rhein.-Westf. Technischen
Hochschule Aachen.

Zur Kenntnis photochemisch sensibilisierter Alkalihalogenidkristalle*.

Von GERHARD MIESSNER und ROBERT WICHARD POHL, Göttingen.

Mit 3 Textabbildungen.

(Eingegangen am 11. Januar 1954.)

Als Modellsubstanzen für photochemische Untersuchungen in festen Körpern eignen sich besonders Alkalihalogenidkristalle, in denen ein kleiner Bruchteil der Halogenionen entweder durch Elektronen oder

Beziehungen:
für die *F*-Bande:

$\nu \cdot a^2 = 2,02 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{sec}$

für die *U*-Bande:¹

$\nu \cdot a^{1,15} = 3,63 \cdot 10^4 \text{ m}^{1,15}/\text{sec}.$

Die *F*-Bande besitzt in Mischkristallen zwei Alkalihalogenide die gleichen Eigenschaften wie in den beiden Komponenten [3]. Auch in den Mischkristalle

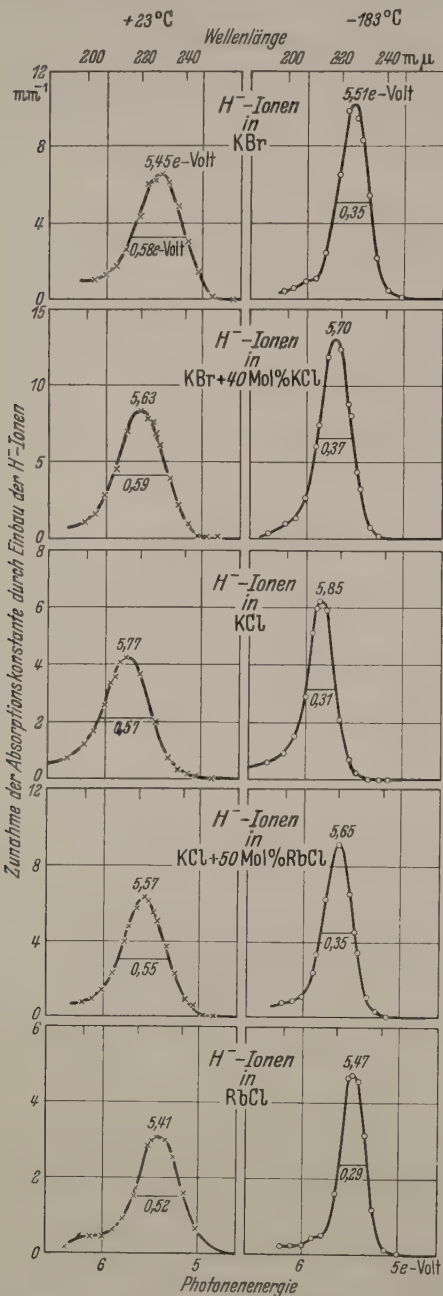


Abb. 1. Die *U*-Bande bleibt auch in Mischkristallen einheitlich.

durch H⁻-Ionen ersetzt ist. Derartig photochemisch sensibilisierte Kristalle zeigen im ersten Fall die bekannte *F*-Bande der Farbzentren, im zweiten Fall die meist mit dem Buchstaben *U* bezeichnete Bande.

Die Lage der Bande wird durch die kristallographische Gitterkonstante *a* bestimmt. Es gelten die

* Herrn Prof. Dr. GEORG JOOS zum 60. Geburtstag gewidmet.

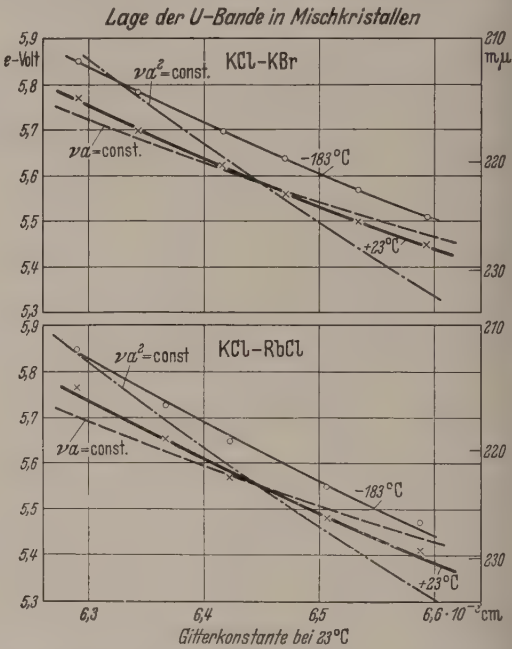


Abb. 2. Zusammenhang zwischen der Energie des Bandenmaximums der *U*-Bande in Mischkristallen und der röntgenographisch gemessenen kristallographischen Gitterkonstante *a*. Die ausgezogenen Kurven sind durch die gemessenen Werte hindurchgelegt. Die gestrichelte Kurve entspricht der Beziehung $\nu \cdot a = \text{const.}$, die strichpunktierte der Beziehung $\nu \cdot a^2 = \text{const.}$. — Der dick ausgezogenen Kurve im KCl-KBr-Mischkristall entspricht der Exponent 1,2; im KCl-RbCl der Exponent 1,37.

gilt z. B. die Beziehung (1). — Die Halbwertsbreite der *F*-Bande ist zwar in Mischkristallen etwas größer als in den reinen Kristallen, doch kann die *F*-Bande in Mischkristallen in keinem Fall durch einfache Überlagerung der beiden Banden der reinen Kristalle zustande kommen.

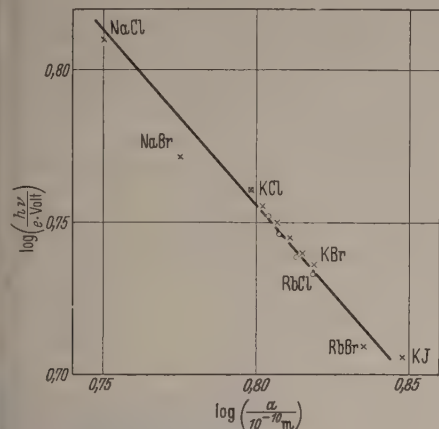
Für die durch H⁻-Ionen entstehende *U*-Bande gilt das Entsprechende. Das soll mit einigen Messungen belegt werden.

Die Abb. 1 bringt ein Übersichtsbild, das oben einen Mischkristall mit gemeinsamem Kation, unten einen solchen mit einem gemeinsamen Anion enthält. Im 2. und 4. Teilbild sind die Banden nur unwesentlich breiter als bei den reinen Komponenten. Der Einfluß der Temperatur auf Gestalt und Lage der *U*-Bande ist in den Mischkristallen nicht anders als in den reinen Kristallen (Teilbilder 1, 3, 5).

Mit Messungen dieser Art für andere Mischungsverhältnisse sind die in den Abb. 2 und 3 dargestellten

¹ Bei der Auffindung der *U*-Bande war der Exponent 1 benutzt worden [1]. Der Exponent 1,15 paßt sich den neuen Beobachtungen besser an [2]. Vgl. Abb. 2 dieser Arbeit.

bnisse erhalten worden. Die Gitterkonstanten röntgenographisch bestimmt worden. Durch die punkte sind die Kurven $\nu a^x = \text{const}$ hindurch-



1. Die Bandenmaxima der heute bekannten U-Banden in Abhängigkeit von der Gitterkonstante. Die Neigung der Geraden gibt den in Gl. (2) benutzten Exponenten $x = 1,15$. Von nicht benannten Punkten gehören die Kreuze der KCl-KBr-Mischreihe, die Kreise zur KCl-RbCl-Mischreihe. Die Exponenten $x = 1,1$ und $1,2$ sind auch noch mit den Messungen vereinbar.

gt, die sich den Messungen bei Zimmertemperatur am besten anschließen. Für die KCl-KBr-Mischreihe ist der Exponent $x = 1,2$; für die KCl-RbCl-Mischreihe ist $x = 1,37$. Beide Exponenten weichen nur un-

wesentlich von dem Wert $x = 1,15$ ab, der für Gl. (2) aus sämtlichen heute bekannten Werten für U-Banden hergeleitet ist. Diese Werte sind in Abb. 3 zusammengestellt.

Man kann die U-Bande als das erste Maximum des Elektronen-Bandenspektrums von KH auffassen, das in den Kristallen gelöst ist. Dann macht ein wenig von 1 abweichender Exponent einen wesentlichen Einfluß der Gitterenergie wahrscheinlich.

Zusammenfassung.

Die U-Bande, die in Alkalihalogenidkristallen durch Ersatz von Halogenionen durch H⁻-Ionen entsteht, zeigt in Mischkristallen das gleiche Verhalten wie die F-Bande in Alkalihalogenid-Mischkristallen, in denen einige Halogenionen durch Elektronen ersetzt sind.

Die Ausführung dieser Arbeit wurde durch Mittel ermöglicht, die wir der Deutschen Forschungsgemeinschaft verdanken.

Literatur. [1] HILSCH, R. und R. W. POHL: Göttinger Nachr. S. 322 der Fachgruppe II, 1933, Tabelle 2. — [2] IVEY, H. T.: Phys. Rev. **72**, 341 (1947). — [3] MIESSNER, G.: Zs. f. Phys. **134**, 576 (1953).

Dipl. Phys. GERHARD MIESSNER und Professor
Dr. ROBERT WICHARD POHL,
Göttingen, I. Physikalisches Institut der Universität.

Eine Bemerkung zur wissenschaftlichen Photographie *.

Von HANS-KARL PAETZOLD, Weissenau/Wttbg.

Mit 3 Textabbildungen.

(Eingegangen am 5. Dezember 1953.)

Die photographische Platte ist auch heute noch, z. B. als Multiplier oder dergl., für viele wissenschaftliche Zwecke ein unentbehrliches Hilfsmittel. Sie bildet mit dem betreffenden Aufnahmeinstrument eine Einheit, durch die die Eigenschaften beider zusammen die Güte der photographischen Abbildung bestimmen. Um hier ein Optimum zu erreichen, müssen daher Platte und Aufnahmeapparatur entsprechend aufeinander abgestimmt sein.

Wesentliche Eigenschaften einer photographischen Emulsion sind ihre Empfindlichkeit und ihr Auflösungsvermögen. Zwischen beiden besteht ein Zusammenhang, indem im allgemeinen die Empfindlichkeit bei einem Auflösungsvermögen kleiner ist und umgekehrt. Bei einem gegebenen Instrument wird daher eine erstrebte, feste, untere Grenze der auf der Abbildung noch getrennt dargestellten Einzelheiten des Objekts — etwa gegeben durch das optische Auflösungsvermögen der Apparatur selbst usw. — existieren, bestehend, bei dem die erforderliche Belichtungszeit ein Minimum aufweist oder die linearen Abmessungen des Instruments möglichst klein sind. Ersteres kann z. B. bei der Astrophotographie von Wichtigkeit sein, wo bei Aufnahmen des Mondes und der Planeten möglichst kurze Belichtungszeiten notwendig sind, um den schädlichen Einfluß der optischen Unruhe der Atmosphäre klein zu halten (1). Aber auch bei der Mikrophotographie werden oftmals bei sich verändernden

den lebenden Objekten bei guter Auflösung kurze Belichtungszeiten von Vorteil sein.

Für die quantitative Beurteilung der verschiedenen photographischen Emulsionen ist nach diesen Gesichtspunkten die Einführung einer Gütezahl G_z zweckmäßig. Sie wird für die Abbildung von flächenhaften Objekten zweckmäßig definiert durch

$$G_z = \text{const } A^2 \cdot E. \quad (1)$$

Dabei bedeuten E die Empfindlichkeit, A das Auflösungsvermögen der Emulsion, d. h. den reziproken Abstand zweier durch die Platte gerade noch getrennt wiedergegebener Einzelheiten, z. B. Striche. Der reziproke Wert der durch (1) gegebenen Gütezahl bedeutet anschaulich das relative Maß der erforderlichen Belichtungszeiten, die bei verschiedenen Emulsionen notwendig sind, wenn bei festgehaltener Eintrittspupille einer optischen Anordnung in der photographischen Abbildung durch einen entsprechend verschieden gewählten Abbildungsmaßstab dieselbe Auflösung der Objekteinzelheiten erzielt werden soll.

Für Zwecke der Astrophotographie und für die Konstruktion kleiner, aber gut auflösender UV-Spektrographen für Ballonaufstiege wurden einige Plattensorten auf ihre Eignung näher untersucht. Dabei wurde die Empfindlichkeit E mittels eines Platin-Quarz-Stufenfilters gemessen. Das Auflösungsvermögen wurde auf 2 Arten bestimmt. Einmal wurde eine eingestaubte Glasplatte auf die Emulsion ohne dazwischengeschaltete Optik kopiert und der Durch-

* Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. GEORG JOOS, zu seinem 60. Geburtstag gewidmet.

messer der kleinsten noch abgebildeten Staubkörner gemessen. Zum anderen wurden von 3 Gitterkopien mit den Konstanten 0,005; 0,01 und 0,02 mm Kon-
taktkopien hergestellt und ihre Beugungsspektren be-
trachtet. Diese erscheinen umso schärfer, je besser die
Platte das betreffende Gitter abbildet, so daß das Auf-
lösungsvermögen für die hier vorliegenden Zwecke ge-
nügend genau abgeschätzt werden kann. Diese zweite
Methode ist wegen ihrer Einfachheit besonders geeig-
net, rasche Auskunft über den Einfluß der verschiede-
nen Faktoren wie Schwärzung, Entwicklung usw. zu
geben.

In Tabelle 1 sind die erhaltenen Ergebnisse für
einige typische Emulsionsarten als Beispiel zusam-
mengestellt, bezogen auf die Werte der Agfa-ISS-
Platte als Einheit. Dabei beziehen sich die Werte für
 A auf die Schwärzung $S = 0,4$, wie sie im Mittel
vorkommen wird. Denn das Auflösungsvermögen A
ist noch von der Schwärzung S abhängig; allerdings
ist der Einfluß für $S < 1$ nur verhältnismäßig gering.
Die relativen Empfindlichkeiten gelten wegen der
etwas verschiedenen Gradationen ebenfalls streng
nur für $S = 0,4$. Die Empfindlichkeiten und Güte-
zahlen sind für integrales Sonnen- oder Bogenlicht und
für das Spektralgebiet bei 4000 Å gegeben, wo nur
noch die unsensibilisierte Empfindlichkeit des Brom-
silbers maßgeblich ist.

Tabelle 1. Relative Empfindlichkeit und Gütezahlen von
photographischen Emulsionen für $S = 0,4$.

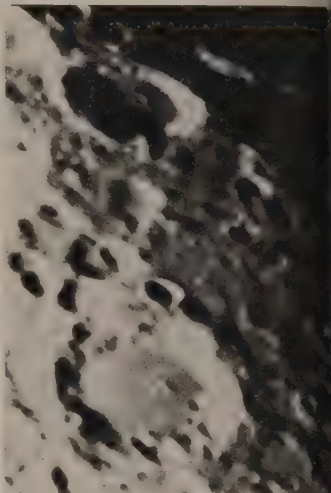
Plattensorte	E		Gz		A
	Sonnen- licht	Sonnen- licht	4000 Å	4000 Å	
1. Agfa-ISS Panchrom.	1	1	1	1	40
2. Agfa-Autolith, Orthochrom.	0,40	10	0,7	17	200
3. Gevaert-Process, Pe- rutz-Perulith, Orthochrom.	0,23	4,2	0,5	9	170
4. Gevaert-Litholine Orthochrom.	0,06	3,3	0,3	17	300
5. Perutz-Phototechn. Pl. A. unsensib.	0,30	0,7	1,0	2	60
6. Krantz-Dia-Platte, unsensib.	0,05	0,3	0,4	2,5	100
7. Perutz-Spektralgelb	0,21	1,3	—	—	100
8. Perutz-Spektralblau	—	—	0,5	3	100
9. Agfa-Schumann- Platte	—	—	0,15	0,4	70

Nach der Tabelle weisen die Gütezahlen beträcht-
liche Unterschiede in Bezug auf die Emulsionen und
das Spektralgebiet auf. Die größten Werte von Gz und
auch das höchste Auflösungsvermögen besitzen all-
gemein die sehr feinkörnigen Dünnschichtplatten Nr. 2,
3 und 4, wie sie für die Herstellung von Rasterplat-
ten für Farbdruke entwickelt worden sind. Dies ist
nicht verwunderlich, da ja das Auflösungsvermögen
von der Größe der Silberkörner und der Streuung des
Lichtes in der Gelatineschicht begrenzt wird. Das weit-
aus günstigste Verhältnis zwischen Empfindlichkeit
und Auflösungskraft tritt im weißen Licht bei der Agfa-
Autolithplatte auf, die bei praktischen Versuchen auch
die besten Ergebnisse ergab. Im Vergleich dazu ist bei
der Gevaert-Litholineplatte wegen ihrer Feinkörnig-
keit die Empfindlichkeit schon so stark abgesunken,
daß der Verlust durch Verkleinerung des Bildmaß-
stabes gemäß ihrem Auflösungsvermögen nicht mehr
wettgemacht werden kann. Überraschend schlecht
sind Dia-Platten (Nr. 6) und Phototechnische Platten

(Nr. 5). Aber auch für wissenschaftliche Zwecke be-
stimmte Emulsionen wie die Perutz-Spektralplatte
und besonders die Agfa-Schumann-Platten weisen
kleine Gütezahlen auf. Ferner dürfen nach der Tabel-
le auch in der allgemeinen Photographie, wenn die Au-
lösung eines guten Objektivs ganz ausgeschöpft we-
den soll, nicht die üblichen panchromatischen Emu-
sionen verwandt werden, für die in der Tabelle die
Agfa-ISS-Platte aufgeführt worden ist, sondern Emu-
sionen wie Gevaert-Proceß oder Perutz-Perulith, die
auch panchromatisch hergestellt werden.

Für die Anwendung der Tabelle sei ein Beispiel aus
der Astrophotographie gegeben [1]. Abb. 1 stellt
einen kleinen Teilausschnitt aus einer Mondphoto-
graphie auf Agfa-Autolith-Platten in 20 facher Nach-
vergrößerung dar, ohne daß das Plattenkorn stören
in Erscheinung tritt.

Als Aufnahmerohr
diente ein Cassegrain-
Spiegelteleskop mit
einer Äquivalent-
brennweite von 4 m
und 20 cm Spiegel-
durchmesser [2]. Das
Originalbild des Mon-
des hat einen Durch-
messer von 3,3 cm.
Die optische Unruhe
der Luft war mittel-
stark. Trotzdem sind
Kratergruben bis
herunter zu 2'' Durch-



messer abgebildet,
was für mitteleuro-
päische Luftverhält-
nisse einen sehr guten
photographischen
Auflösungsgrad be-
deutet. Der Grund
hierfür liegt in der
nur geringen Belichtungszeit, die entsprechend der
hohen Gütezahl nach Tab. 1 nur 1/10 sec betrug.
Dementsprechend zeigten Aufnahmen auf Agfa-ISS-
Platten mit 20 m Äquivalentbrennweite, also bei glei-
cher photographischer Objektauflösung, aber mit 1 sec
Belichtungszeit, eine viel größere, durch die Szintillir-
tion verursachte Unschärfe. Auch bei Aufnahmen des
Jupiter und Saturn war die Ausbeute an guten Bildern
mit 4 m Brennweite auf Autolithplatten am größten.

Als weiteres Beispiel sei ein kleiner UV-Spektro-
graph angeführt, der für Ballonaufstiege für die Auf-
nahmen des UV-Sonnenspektrums konstruiert worden
war. Er mußte daher bei guter spektraler Auflösung
möglichst klein sein, um bei genügend geringem Ge-
wicht eine ausreichende mechanische Stabilität aufzu-
weisen. Abb. 2 zeigt die Photometerkurven der Hg-
Linie bei 3126 Å auf Perutz-Spektralblau und Ge-
vaert-Litholine. Die Halbwertsbreiten betragen jeweils
 $2,2 \cdot 10^{-2}$ und $1,3 \cdot 10^{-2}$ mm, was einem praktischen
Auflösungsvermögen von 0,6 Å und 0,35 Å ent-
spricht bei einer linearen Dispersion von $\frac{27,4^\circ}{\text{mm}}$. Diese

Halbwertsbreiten sind die Summen aus der Breite des
Spaltbildes (0,005 mm), der Beugungsunschärfe des
Spektralapparates (0,005 mm) und der Plattenun-
schärfe (0,01 bzw. 0,003 mm nach Tab. 1).

Abb. 1.
Mondgegend bei Krater Longomontani in
Morgenbeleuchtung. Agfa-Autolithplatten.
20fache Nachvergrößerung, 1 mm = 2,6''
Cassegrain-Spiegelteleskop, Spiegeldurch-
messer = 20 cm, Äquivalentbrenn-
weite = 4 m.

Die Abb. 3 gibt 2 Aufnahmen¹ des UV-Sonnenstrahls auf den beiden Plattensorten zum Vergleich 0 facher Nachvergrößerung. Man erkennt die Auflösungskraft der Litholine-Platte und die sehr störend wirkende Körnigkeit der Perutz-Platte. Um mit der Letzteren dieselbe spektrale Auflösung zu erreichen, hätten die Brennweiten Kamera und Kollimatorlinse verdoppelt werden müssen; dabei wären die Belichtungszeiten gegenüber den Litholine-Platten etwa um den Faktor 2 gestiegen.

Es ist noch zu erwähnen, daß das ideale spektrale Auflösungsvermögen dieses kleinen UV-Spektrographen, der drei 60°-Homosilprismen mit insgesamt 3,3 cm wirksamer Basislänge und eine Kamera- und Kollimatorlinse von 200 mm Brennweite

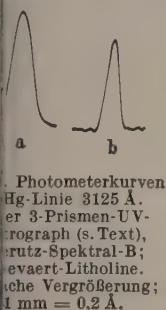
10 mm freie Öffnung besitzt, 0,10 Å beträgt. Um es voll auszunützen, müßten die Brennweiten für beiden Plattensorten bis ca. 1,0 m bzw. 2,0 m erhöht werden. Allgemein kann im Ultraviolett wegen des verismäßig steilen Anstiegs der Dispersionskurve der endeten Prismensubstanzen die lineare Dispersion Spektrographen, ausgerüstet mit einem 60°-Prisma von 2 cm Kantenlänge, durch Erhöhung der Brennweiten auf ca. 1 Meter und darüber ohne „toter Bereich“ gesteigert werden, sofern es die Lichtintensität erlaubt. Umgekehrt wird in diesem Spektralgebiet bei einem Mehrprismenapparat dessen Auflösungsvermögen nicht von der wirksamen Basislänge der Prismen bestimmt, sondern vielmehr von der Beugungsunschärfe der Objektive selbst begrenzt.

Daß aber auch bei Spektralapparaten für das sichtbare Spektralgebiet recht große Brennweiten bei der Verwendung von Emulsionen erforderlich sein können, zeigt das folgende letzte Beispiel: ein 2-Prismen-Spektrograph aus SCHOTT'schem Flintglas F 3 mit je einer wirksamen Basislänge besitzt an der Stelle der Kamera ein Auflösungsvermögen von 0,9 Å. Falls man die Breite des Spaltbildes von 0,003 mm auf der Kamera die Beugungsunschärfe des Spektralapparates auf die Hälfte gegenüber dem Spaltbild und der Abbil-

Für die Herstellung dieser Aufnahmen danke ich Herrn phys. ZSCHÖRNER.

dungsunschärfe der Platte betragen soll, so muß bei Litholine-, Autolith-, Perutz-Spektral-Gelb- und Agfa-ISS-Platten die Brennweite der Kameralinse 60, 80, 140 bzw. 300 cm betragen.

Die hier mitgeteilten praktischen Beispiele zeigen, daß die genauere Beachtung der Eigenschaften der in Frage kommenden Emulsionen oftmals von Vorteil sein wird. Es ist noch anzumerken, daß Farbemul-



Photometerkurven
Hg-Linie 3125 Å.
er 3-Prismen-UV-
spektrograph (s. Text),
Perutz-Spektral-B;
Gevaert-Litholine.
31fache Vergrößerung;
1 mm = 0,2 Å.

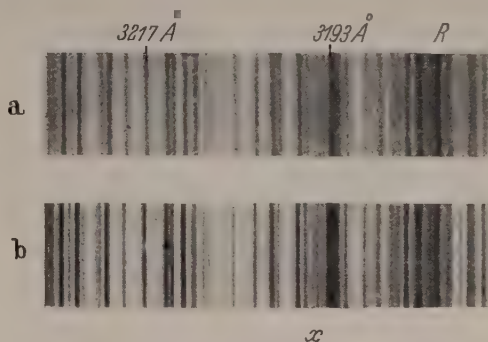


Abb. 3. Ultraviolett-Spektrum der Sonne bei 3200 Å.
Kleiner 3-Prismen-UV-Spektrograph, a) Perutz-Spektral-B;
b) Gevaert-Litholine. 31fache Nachvergrößerung;
1 mm = 0,96 Å. Man beachte die mit einem Kreuz
markierte enge Liniengruppe, die nur von der Litho-
line-Platte aufgelöst wird.

sionen, obwohl sie kein ausgesprochenes Korn aufweisen, ebenfalls nur ein begrenztes Auflösungsvermögen besitzen. Dieses ist nicht einmal besonders hoch, da die Dicke der Gelatineschicht wegen der Mehrfachschichtung recht beträchtlich ist. Nach Messungen von J. EGGERT und W. GROSSMANN [3] liegt das Auflösungsvermögen von Farbemulsionen zwischen 50 und 100 mm⁻¹. Daraus folgt mit einer Empfindlichkeit von 14/10° DIN für weißes Licht ein Gütefaktor zwischen 2 und 5.

Zusammenfassung.

Es werden verschiedene photographische Emulsionen in Bezug auf ihre Empfindlichkeit und ihr Auflösungsvermögen untersucht und die optimalen Verhältnisse bei einigen optischen Instrumenten (Fernrohr, Spektralapparat) diskutiert.

Literatur. [1] PAETZOLD, H. K.: Die Sterne **29**, 10 (1953). — [2] PAETZOLD, H. K.: Die Himmelswelt **56**, 185 (1949). — [3] EGGERT, J. u. W. GROSSMANN: Naturw. **39**, 132 (1953).

Dr. HANS-KARL PAETZOLD,
Max-Planck-Institut für Physik der Stratosphäre,
Weißenau bei Ravensburg.

Grenzsichtphänomene beim Stromübergang aus einem Normalleiter in einen Supraleiter*.

Von GERHARD U. SCHUBERT und KARL-HEINZ SCHRAMM, Mainz.

Mit 3 Textabbildungen.

(Eingegangen am 17. Dezember 1953.)

1. Einleitung¹.

Das einfachste Modell eines Kontaktes zwischen Normalleiter (N. L.) und Supraleiter (S. L.) ist das folgende: Ein n.l. und ein s.l. Kreiszyylinder von glei-

chem Radius stoßen längs einer zur Zylinderachse senkrechten Ebene zusammen. In Entfernungen von der Berührungsebene, die groß sind gegen den Zylinderderradius, werde Gleichstrom zu-, bzw. abgeführt.

Dieser Fall ist bei v. LAUE [1] behandelt, während das

entsteht sie einer Diplomarbeit von SCHRAMM. Auf der Innsbrucker Physikertagung wurde am 23. 9. 53 auszugsweise darüber berichtet.

entsprechende ebene Problem (vgl. Abb. 1) sich bei LONDON [2] findet. Daß LONDON einen S. L. endlicher Länge zwischen zwei N. L. durchrechnet, läuft praktisch auf dasselbe hinaus; denn man braucht nur einen mathematischen Grenzübergang zu vollziehen, was wir im folgenden stets getan haben. v. LAUE findet, daß sich im N. L. die übliche gleichförmige Stromverteilung einstellt, daß die Stromlinien beim Übergang zum S. L. einen Knick erleiden und daß in einer Entfernung von einigen Eindringtiefen von der Grenzfläche im S. L. diejenige Stromverteilung auftritt, die sich beim beiderseits unendlich langen S. L. finden würde. Ist der Drahradius groß gegen die Eindringtiefe, dann bedeutet diese letztere Stromverteilung eine vom Rand nach innen exponentiell abnehmende Stromdichte („Stromhaut“). Daß die Stromverteilung im N. L. bis zur Grenzfläche homogen ist, rührt davon her, daß das elektrische Feld im S. L. verschwindet, daß also die Grenzfläche eine Äquipotentialfläche ist. Die übliche

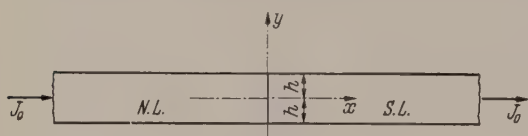


Abb. 1. Ebenes Modell eines Kontaktes zwischen Normal- und Supraleiter. N. L. Normalleiter, S. L. Supraleiter, Plattendicke $2h$, Strom für Plattenhöhe eins $I_0 = \int_{-h}^{+h} J_x dy$, z -Achse senkrecht zur x, y -Ebene.

Stromhaut im S. L. in einiger Entfernung von der Grenzfläche ist anschaulich verständlich. Um nun den Übergang von der homogenen Stromverteilung zur Stromhaut zu bewerkstelligen, muß sich im S. L. in der Nähe der Grenzfläche eine Radialkomponente der Stromdichte ausbilden. Diese hat das Umknicken der Stromlinien zur Folge.

Wir wollen aus mathematischen Gründen nur das ebene Problem behandeln. Dabei treten nur die Komponenten J_x und J_y der Stromdichte \vec{J} auf. Für diese hat LONDON [2] Reihenentwicklungen angegeben, die aber den Nachteil haben, daß sie in dem physikalisch interessanten Gebiet unmittelbar in der Umgebung der Grenzfläche sehr schlecht konvergieren. Deshalb erscheint es lohnend, dieses Gebiet näher zu untersuchen. Dabei wird man zunächst nach dem „Brechungswinkel“ der Stromlinien fragen. Aus Symmetriegründen muß er in der Mittelebene der Platten verschwinden, ebenso aber am Rande, weil die äußerste Stromlinie parallel zum Plattenrand ($y = \pm h$) verläuft. Damit die homogene Stromverteilung rasch in die Stromhaut übergeht, sollte er mit wachsender Entfernung $|y|$ von der Mittelebene ($y = 0$) zunächst stark zunehmen.

2. Formulierung der mathematischen Aufgabe.

Abb. 1 zeigt die Anordnung. Bei $x \rightarrow \pm \infty$ werde Gleichstrom zu-, bzw. abgeführt. Alle Größen seien von z unabhängig, ebenso von der Zeit (Stationarität). Stromdichte \vec{J} und Magnetfeld \vec{H} (wir nehmen die Permeabilität = 1 an) hängen im N. L. und im S. L. stets durch die Gleichung

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \quad (1)$$

zusammen (GAUSSSES Maßsystem).

Wegen der homogenen Stromverteilung im N. (vgl. Einleitung) und wegen Gl. (1) ist

$$J_x = J_0 = \frac{J_0}{2h} \quad J_y = J_z = 0 \quad x \leq 0, \\ H_x = H_y = 0 \quad H_z = \begin{cases} \frac{4\pi}{c} J_0 \cdot y & \text{für } |y| \leq h \\ \frac{4\pi}{c} J_0 h & \text{für } |y| \geq h \end{cases} \quad x \geq 0.$$

Im S. L. gilt bekanntlich (v. LAUE [1])

$$(\Delta - \beta^2) \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = 0.$$

Dabei ist β^{-1} die Eindringtiefe (Größenordnung 10^{-5} cm).

Durch den erwähnten Grenzübergang in den von LONDON [2] angegebenen Reihen, findet man

$$H_x = H_y = J_z = 0,$$

$$J_x = J_0 \left\{ \beta h \frac{\cos \beta y}{\sin \beta h} + 2 \cdot \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^{v+1} \cos \frac{v\pi}{h} y}{1 + \left(\frac{v\pi}{\beta h}\right)^2} \exp\left(-\beta x \sqrt{1 + \left(\frac{v\pi}{\beta h}\right)^2}\right) \right\} \quad (6)$$

$$J_y = J_0 \frac{2\beta h}{\pi} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^{v+1} \sin \frac{v\pi}{h} y}{v \sqrt{1 + \left(\frac{v\pi}{\beta h}\right)^2}} \exp\left(-\beta x \sqrt{1 + \left(\frac{v\pi}{\beta h}\right)^2}\right) \quad (7)$$

$$H_z = \frac{4\pi}{c} J_0 h \left\{ \frac{\sin \beta y}{\sin \beta h} + \frac{2}{\pi} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^{v+1} \sin \frac{v\pi}{h} y}{v \left[1 + \left(\frac{v\pi}{\beta h}\right)^2\right]} \times \exp\left(-\beta x \sqrt{1 + \left(\frac{v\pi}{\beta h}\right)^2}\right) \right\}. \quad (8)$$

Zur Gl. (8) gelangt man durch Überlagerung der Lösungen für die beiderseits unendliche Platte (erster Term in der geschweiften Klammer auf der rechten Seite von (8)) und einer FOURIERREihe nach y , deren x -Abhängigkeit aus (4) durch Separationsansatz folgt. Die Koeffizienten der Reihe werden so bestimmt, daß H_z und das nach (1) durch Differentiation von (8) zu berechnete J_x sich stetig an die durch (3) und (2) gegebenen Werte anschließen. Man sieht (6) sofort an, daß für $\beta x \gg 1$ und $\beta h \gg 1$ die bekannte Stromhaut herauskommt, während (7) anzeigt, daß J_y für $\beta x \gg 1$ praktisch verschwindet.

Die hier zu behandelnde Aufgabe besteht nun gerade darin, die Reihen (6) und (7) für den Fall zu untersuchen, daß βx nicht $\gg 1$ ist.

3. Genaueres über die Stromverteilung beim dicken S. L.

Definitionsgemäß ist ein dicker S. L. durch $\beta h \gg 1$ gekennzeichnet.

a) Berechnung des Brechungswinkels α der Stromlinien.

Aus Symmetriegründen genügt es y auf das Intervall $0 \dots h$ zu beschränken. Wir interessieren uns nur für

$$\text{tg } \alpha = \left[\frac{J_y}{J_x} \right]_{x=0} = \frac{1}{J_0} [J_y]_{x=0} = \frac{2\beta h}{\pi} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^{v+1} \sin \frac{v\pi}{h} y}{v \sqrt{1 + \left(\frac{v\pi}{\beta h}\right)^2}} \quad (9)$$

haben wir in (7) $x = 0$ gesetzt. Man sieht so-
daß

$$\operatorname{tg} \alpha = 0 \quad \text{für} \quad y = 0 \quad \text{und} \quad y = h \quad (10)$$

Man wird zunächst in nullter Näherung wegen
 > 1 die Wurzeln in den Nennern von (9) gleich
setzen. Dann steht gerade die bekannte FOURIER-

$$\frac{y}{h} = \frac{2}{\pi} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^{v+1}}{v} \cdot \sin \frac{v\pi}{h} y \quad |y| \leq h \quad (11)$$

aus der

$$\operatorname{tg} \alpha = \beta y \quad y < h \quad (12)$$

Da β von der Größenordnung 10^5 cm ist, wächst α
zunehmendem y sehr rasch gegen $\pi/2$.

Für $y = h$ ist aber die FOURIERreihe (11) nicht mehr gleich-
g konvergent, weil die Koeffizienten nur wie $1/v$ abneh-
men. Wenn uns also die Frage nach dem genaueren Verlauf
des Brechungswinkels bei Annäherung an den Rand $y = h$
angeht, müssen wir von der exakten Reihe (9) ausgehen,
die auch für $y = h$ gleichmäßig konvergiert, weil ihre
Koeffizienten für $v \rightarrow \infty$ wie $1/v^2$ abnehmen. Das bedeutet aber
sicheres als die unbequeme Forderung, daß wir die
Wurzeln in den Nennern eben nicht einsetzen dürfen, daß
mit anderen Worten auch die Reihenglieder mit $v \geq \beta h/\pi$
berücksichtigen müssen.

Man muß versuchen die Reihe (9) zumindest näher-
ungsweise aufzusummieren. Nach vielen vergeb-
lichen Versuchen fanden wir, daß dies am besten die
FOURIERSche Summenformel (vgl. MAGNUS-OBERHET-
TER [3])

$$f(v) = \frac{1}{2} \{f(\infty) - f(0)\} + \int_0^{\infty} f(\xi) d\xi \\ + 2 \sum_{v=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f(\xi) \cos(2\pi v \xi) d\xi \quad (13)$$

et. Zunächst formen wir (9) durch die Substitu-
 $v = h - y$ um:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = T(v) = \frac{2h\beta}{\pi} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{v\pi}{h} v}{v \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{v\pi}{\beta h}\right)^2}}. \quad (14)$$

Wir haben also in (13)

$$f(\xi) = \frac{2h\beta}{\pi} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{h} v \cdot \xi\right)}{\xi \sqrt{1 + \left(\frac{\pi \xi}{\beta h}\right)^2}} \quad (15)$$

setzen. Die Werte $f(0)$ und $f(\infty)$ lassen sich leicht bil-
den. Zur Auswertung des ersten Integrales auf der rechten
Seite von (13) schreibt man zunächst den sin als Inte-
gral über cos mit v als Integrationsvariabler, so daß man
ein Doppelintegral nach ξ und v erhält. Jetzt kann man
die bekannte [3] Integraldarstellung der HANKELSchen
Funktion $H_0^{(1)}$ von rein imaginärem Argument benutzen:

$$= \frac{2\beta h}{\pi} \left\{ -\frac{\pi v}{2h} + \int_0^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi v \xi}{h}}{\xi \sqrt{1 + \left(\frac{\pi \xi}{\beta h}\right)^2}} d\xi + R \right\} \quad (16a)$$

$$= \frac{2\beta h}{\pi} \left\{ -\frac{\pi v}{2h} + \frac{\pi}{h} \int_0^v dv \int_0^{\infty} d\xi \frac{\cos \frac{\pi v \xi}{h}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi \xi}{\beta h}\right)^2}} + R \right\} \quad (16b)$$

und

$$T(v) = \frac{2\beta h}{\pi} \left\{ -\frac{\pi v}{2h} + \frac{i\beta\pi}{2} \int_0^v H_0^{(1)}(i\beta v) dv + R \right\}. \quad (16c)$$

Dabei haben wir die auf der rechten Seite von (13)
auftretende Summe von Integralen mit R (Restglied)
bezeichnet. Das Integral über die HANKELSche Funk-
tion läßt sich (vgl. [3]) unter Verwendung von STRUVE-
sche Funktionen S_v darstellen. Diese S_v sind Lösun-
gen der inhomogenen BESSELSchen Differentialglei-
chung. Bei der weiteren Durchrechnung geht man
jedoch zweckmäßigerweise von (16c) aus. Es wird jetzt

$$T(v) = \frac{2\beta h}{\pi} \left\{ -\frac{\pi v}{2h} + \frac{i\pi\beta v}{2} H_0^{(1)}(i\beta v) \right. \\ \left. + \frac{i\pi^2\beta v}{4} [H_1^{(1)}(i\beta v) S_0(i\beta v) \right. \\ \left. - H_0^{(1)}(i\beta v) S_1(i\beta v)] + R \right\}. \quad (17)$$

Das Restglied ist eine Summe von Integralen, die sich
in ähnlicher Weise behandeln lassen. Eine genauere
Abschätzung, auf die hier der Kürze wegen leider nicht
eingegangen werden kann, ergab

$$|R| < 2e^{-\beta h} \quad \text{für} \quad \beta h \geq 10. \quad (18)$$

Wir fragen nun nach dem Maximum für $\operatorname{tg} \alpha$. Aus (16)
folgt durch Differentiation nach v und Nullsetzen des
Differentialquotienten für den Wert v_0 , der $\operatorname{tg} \alpha$ zu
einem Maximum macht:

$$i\beta h H_0^{(1)}(i\beta v_0) = 1. \quad (19)$$

Numerisch erhält man z. B.

$\frac{\beta h}{\beta v_0}$	10 ⁴	10 ⁵	10 ⁶
	5,78	7,93	10,11

Wir diskutieren zunächst den Fall $v \geq v_0$, d. h.,
 $0 \leq y \leq h - v_0$. Unter Weglassung des Restgliedes
 R , das wir schon als vernachlässigbar klein erkannt
haben, läßt sich Gl. (16c) folgendermaßen umformen:

$$T(v) = \beta \left\{ \int_0^h [i\beta h H_0^{(1)}(i\beta t) - 1] dt \right. \\ \left. + \int_h^v [i\beta h H_0^{(1)}(i\beta t) - 1] dt \right\}. \quad (20)$$

Da man schon weiß, daß für $v = h$, d. h. für $y = 0$ der
Brechungswinkel Null ist, kann man sofort auf das
Verschwinden des ersten Integrales in der geschweiften
Klammer schließen. Zur Auswertung des zweiten In-
tegrales ersetzt man die HANKELSche Funktion durch
ihre bekannte [3] asymptotische Entwicklung für
großen Betrag des Arguments. Damit ergibt sich nach
einer Rechnung

$$T(v) = \beta \left\{ (h - v) + h \sqrt{\frac{2}{\pi\beta v}} e^{-\beta v} \left[1 + O\left(\frac{1}{\beta v}\right) \right] \right. \\ \left. - h \sqrt{\frac{2}{\pi\beta h}} e^{-\beta h} \left[1 + O\left(\frac{1}{\beta h}\right) \right] \right\}. \quad (21)$$

0 bedeutet Größenordnung

(21) ist bis auf Glieder der Größenordnung $\exp(-\beta v_0)$
bzw. $\exp(-\beta h)$ unsere Näherungsformel (12). Wäh-
rend wir (12) nur mit der Einschränkung $y < h$
versehen hatten, können wir hier diese Ungleichung zu
 $y \leq h - v_0$ verschärfen, wobei v_0 durch (19) definiert
ist.

Sei jetzt $v \ll v_0$, d. h. $h - y \ll v_0$. Dann ist in genügender Näherung

$$i H_0^{(1)}(iz) = \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma z}. \quad (22)$$

Dabei ist $\gamma = e^C$ ($C = \text{EULERSche Konstante} = 0,577215 \dots$). Gl. (16c) liefert

$$T(v) = \beta v \left\{ -1 + \frac{2\beta h}{\pi} [(1 + \ln 2 - C) - \ln(\beta v)] \right\} \\ = \beta^2 v h \{0,710 - 0,637 \ln(\beta v)\}. \quad (23)$$

In der geschweiften Klammer ist noch -1 gegen $2\beta h/\pi$ vernachlässigt worden. Das Anwachsen von $\text{tg } \alpha$ vom Rande $v = 0$ her erfolgt also um das logarithmische Glied schwächer als linear. Abb. 2 zeigt ein Beispiel. Während aber wegen des Faktors β in (21) bzw. (12) α praktisch nach größenordnungsmäßig 10 Eindringtie-

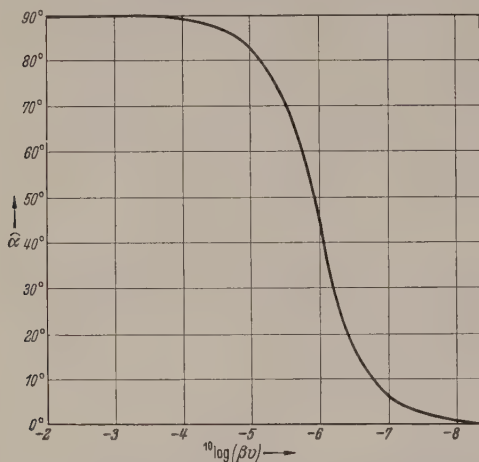


Abb. 2. Brechungswinkel α in der Nähe des Plattenrandes $y = h$. $v = h - y$. Die Kurve ist für $\beta h = 10^5$ gerechnet worden.

fen den Wert $\pi/2$ erreicht hat, geschieht dies hier (vgl. (23)) wegen des Faktors $\beta^2 h$ schon bei einer Entfernung von größenordnungsmäßig $10/(\beta^2 h)$ vom Rande. Wir brauchen den Fall $v < v_0$ aber nicht $\ll v_0$, der noch zu diskutieren wäre, garnicht mehr gesondert zu behandeln, da wir jetzt schon wissen, wo vom Rande her kommend α praktisch $\pi/2$ wird. Diese Strecke ist nun nicht etwa von der Größenordnung 1 bis 0,1 der Eindringtiefe, sondern wird von der Größenordnung der BOHRschen Bahnen und noch kleiner. Darüber wird unten noch gesprochen werden müssen.

b) Die Stromverteilung in der Nähe der Berührungsebene von N. L. und S. L.

In den Gl. (6) und (7) kann jetzt x nicht mehr Null gesetzt werden. Man wendet auf die in diesen beiden Gl. vorkommenden Reihen die Poissonsche Summenformel an, unterdrückt ein Restglied, das als vernachlässigbar klein abgeschätzt werden kann, weil alle Reihenglieder gegenüber (9) mit Faktoren x , die zwischen Null und eins liegen, multipliziert sind. Dann kann man wieder $\int_0^\infty f(\xi) d\xi$ in ein Doppelintegral verwandeln. Die Rechnung soll hier nicht vorgeführt werden.

Es sei nur eine Einzelheit mitgeteilt. Bei MAGNUS-OBERHETTINGER [3] sowie in dem bekannten Werk über BESSEL-funktionen von WATSON findet man folgende Formel

$$H_0^{(1)}(a\sqrt{x^2 + y^2}) = -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (t^2 - a^2)^{-1/2} \exp(iyt - x\sqrt{t^2 - a^2}) dt \quad (24)$$

Wichtig ist dabei die ausdrückliche Einschränkung, die in S. 40 zu finden ist: x, y, a reell und positiv, $\sqrt{t^2 - a^2}$ positiv für $t^2 > a^2$ und negativ imaginär für $-a < t < +a$. behaupten nun, daß sich diese Formel auch auf komplexe a ($x > 0, y \geq 0$) erweitern läßt. In unserem Fall braucht sie für rein imaginäres a . In Abb. 3 ist das obere Blatt der RIEMANNschen Fläche für $\sqrt{t^2 - a^2}$ gezeichnet mit den passgelegten Verzweigungsschnitten. Die Angaben von MAGNUS-OBERHETTINGER über das Wurzelvorzeichen bedeuten nichts anderes als die Integration längs der mit (C) bezeichneten Kurve. Der Übergang zu komplexem a (sei $0 < \arg(a) < \pi$) bringt keine Schwierigkeiten. Die neuen Verzweigungsschnitte sind strichliert eingezeichnet. Man findet also sofort als Spezial-

$$H_0^{(1)}(iA\sqrt{x^2 + y^2}) = -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (t^2 + A^2)^{1/2} \exp(iyt - x\sqrt{t^2 + A^2}) dt$$

$x > 0, y \geq 0, A$ positiv reell.

In der in Fußnote 1 genannten Diplomarbeit von SCHRAMM ist ein anderer Beweis für (25) angegeben, den wir auf SOMMERFELDSche Integraldarstellung der HANKELschen Funktionen aufgebaut haben.

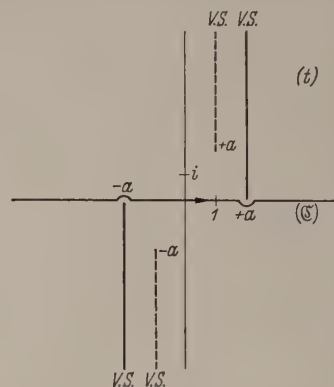


Abb. 3. Zur Integraldarstellung der HANKELschen Funktion $H_0^{(1)}(a\sqrt{x^2 + y^2})$. Gezeichnet ist das obere Blatt der RIEMANNschen Fläche auf der $\sqrt{t^2 - a^2}$ eindeutig ist. t Integrationsvariable, (C) Integrationsweg, V. S. Verzweigungsschnitt. a reell und positiv = ausgezogener V. S. a komplex ($0 < \arg(a) < \pi$) = gestrichelte V. S.

Die Stromdichten sind bei Unterdrückung der Restglieder

$$J_y = J_0 \beta y e^{-\beta x} - J_0 \beta^2 h \int_y^h H_0^{(1)}(i\beta \sqrt{x^2 + \varphi^2}) d\varphi \quad (26)$$

$$J_x = J_0 \beta h \frac{\cos \beta h}{\sin \beta h} + J_0 e^{-\beta x} \\ - J_0 \beta^2 h \int_x^\infty H_0^{(1)}(i\beta \sqrt{\chi^2 + v^2}) d\chi. \quad (27)$$

Rechnungen, analog zu denen in Abschnitt a) führen zu folgenden Näherungen:

$$J_y(x, y) = J_0 \beta y e^{-\beta x} \quad \text{für } |y| \leq h - v_m(x), \quad (28)$$

$$J_y(x, y) = J_0 e^{-\beta x} T\left(h - y, \frac{v_0}{v_m(x)}\right) \quad \text{für } h - v_m(x) \leq y \leq v_0 \quad (28)$$

$$J_x(x, y) = J_0 \{ \beta h e^{-\beta(h-y)} + e^{-\beta x} \} \quad \text{für } x \geq x_m(y), \quad (29)$$

$$J_x(x, y) = J_0 \left\{ e^{-\beta x} + e^{-\beta(h-y)} \cdot T\left(x, \frac{v_0}{x_m(y)}\right) \right\} \\ \text{für } 0 \leq x \leq x_m(y). \quad (29)$$

Dabei ist $T(w) = \text{tg } \alpha$ (siehe Abschnitt a). Für das Argument w sind die in (28b) und (29b) angegebenen zusammengesetzten Variablen einzutragen. Dabei tritt v_0 aus (19) wieder auf. Die Lage des Maximums von J_y bei festgehaltenem x werde mit $v_m(x)$ bezeichnet. Aus (26) folgt durch Differentiation

$$\beta h i H_0^{(1)}(i\beta \sqrt{x^2 + v_m^2}) = e^{-\beta x}. \quad (30)$$

schreibt man in dieser Gleichung v statt x , x_m statt y ist damit auch die letzte der in den Gln. (28a) bis auftretenden Größen erklärt. Es wird $x_m = x(v_m)$ $(h - y) \equiv x_m(y)$. Der Vergleich von (30) mit zeigt, daß

$$[x_m]_{y=h} = v_m(0) = v_0. \quad (31)$$

hiesen Anfangswerten wächst x_m mit abnehmen- und v_m mit zunehmendem x langsam an. Fassen den Punkt x, y ins Auge so wird dort die Neigung Stromlinie gegen die x -Achse etwas geringer sein, y zugehörigen Punkt 0, y an der Grenzfläche, so $y \leq h - v_m$ ist.

Folgerungen aus den Ergebnissen der Rechnungen.
Das wichtigste Ergebnis scheint uns darin zu liegen, daß die für das Umbiegen der Stromlinien charakteristische Länge v_0 (vgl. Gl. (19)) von der Größenordnung eines BOHRschen Wasserstoffradius wird, wenn es mit Supraleitern zu tun hat deren Dicke groß gegen die Eindringtiefe. Das oben behandelte Problem ist offensichtlich eines, das der Behandlung mit der phänomenologischen Theorie eigentlich zuzuschicken sein sollte. Eine Anwendung der phänomenologischen Theorie auf Probleme, bei denen von vornherein sicher ist, daß atomare Längen auftreten, wird natürlich tunlichst vermeiden. Ein solcher Fall ist hier aber zunächst nicht vorzuliegen, wiewohl die Einknicken der Stromlinien verdächtig ist. Rein aus dimensionsbetrachtungen heraus, hätte man wohl annehmen können, daß $\tan \alpha$ sich beim Entfernen von der Ebene $y = 0$ proportional βy ändert. Daß der Proportionalitätsfaktor gerade eins ist, und daß tatsächlich lineare Abhängigkeit, wenigstens mit sehr kleiner Näherung, vorliegt, zeigte die Rechnung. Beim Entfernen vom Rande weg hätte man vielleicht auch lineare Abhängigkeit von $\beta(h - y)$ vermutet mit dem Proportionalitätsfaktor der Größenordnung eins. Daß dieser Proportionalitätsfaktor — abgesehen davon, daß noch ein logarithmisches Glied hinzukommt — aber selbst wieder proportional βh wird, ist nicht so ohne weiteres vorauszusehen. Wir denken, daß der Einwand, wir hätten die LONDON-Theorie in diesem Problem angewendet, für das sie gar nicht zutreffend ist, erst nachträglich erhoben werden könnte. Falls man aus unseren Überlegungen den Schluß ziehen kann, daß man bei Problemen, bei denen sehr stark gekrümmte Stromlinien auftreten unter allen Umständen eine nichtlineare Theorie anzuwenden hat, ist zwar eine solche nichtlineare Theorie, die nicht

zwangsläufig auf atomare Längen führt. Man könnte z. B., wie LONDON in seinem Buch [2] angedeutet hat, bei der Ableitung der Beschleunigungsgleichung $\vec{E} = \partial(\lambda \cdot \vec{J})/\partial t$ (\vec{E} = elektrische Feldstärke, $\lambda = 4\pi(\beta c)^{-2}$) ein Glied rechts hinzufügen, das der Konvektiven Beschleunigung in der Strömung der Supraelektronen Rechnung trägt. Nach der linearen Beschleunigungsgleichung ist im stationären Fall im S. L. $\vec{E} = 0$. Bei Berücksichtigung der konvektiven Beschleunigung wäre zunächst $\vec{E} \neq 0$. Damit würde sich auch der Stromverlauf im N. L. etwas ändern, da an der Grenzfläche E_{tang} stetig sein müßte. Aus mathematischen Gründen haben wir derartige Rechnungen noch nicht durchgeführt.

Wir haben uns hier auf den sog. dicken S. L. beschränkt, das beim dünnen S. L. ($\beta h \ll 1$) auch im S. L. die Stromverteilung angenähert homogen ist.

Zusammenfassung.

Nach der linearen LONDONSchen phänomenologischen Theorie der Supraleitung wird der Gleichstromübergang aus einer normalleitenden Platte in eine supraleitende Platte (einfachstes Modell eines Kontaktes) behandelt. Die von LONDON für diesen Fall angegebenen Reihen für die Komponenten der Stromdichte im Supraleiter — im Normalleiter bleibt die homogene Stromverteilung bis zur Berührebene erhalten — konvergieren in der Nähe der Grenzfläche sehr schlecht. Daher werden diese Reihen mittels der POISSONSchen Summenformel aufsummiert, und brauchbare Näherungsformeln hergeleitet. Die Stromlinien erfahren beim Eintritt in den Supraleiter eine Brechung. Der Brechungswinkel wächst von seinem Wert Null in der Symmetrieebene auf einer Strecke von etwa zehn Eindringtiefen auf den Wert $\pi/2$ an. Am Rande muß er wieder Null sein. Der Abfall von $\pi/2$ nach Null erfolgt innerhalb einer Strecke von der Größenordnung eines BOHRschen Wasserstoffradius. Dies läßt an der Gültigkeit der linearen Theorie bei Stromverteilungen mit sehr kleiner Krümmung der Stromlinien zweifeln.

Literatur: [1] v. LAUE, M.: Theorie der Supraleitung, Springer-Verlag Berlin—Göttingen—Heidelberg 1949. — [2] LONDON, F.: Superfluids, Vol. 1 Verlag J. Wiley New York 1950. — [3] MAGNUS, W. u. F. OBERHETTINGER: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, 2. Auflage. Springer-Verlag Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1948.

Prof. Dr. GERHARD U. SCHUBERT und
Dipl.-Phys. KARL-HEINZ SCHRAMM,

Inst. für theoret. Physik der Universität Mainz.

Über die Strahlung langer Wellen des horizontalen Dipols in dem Lufthohlraum zwischen Erde und Ionosphäre I.*

VON WINFRIED OTTO SCHUMANN, München.

Mit 1 Textabbildung.

(Eingegangen am 11. Januar 1954.)

Das Problem der Ausstrahlung eines horizontalen Dipols über einer ebenen ∞ ausgedehnten Erde ist von A. SOMMERFELD [1] behandelt worden. Wichtigstes Resultat ergab sich, daß zur Erfüllung

Herrn Prof. Dr. G. Joos zum 60. Geburtstag gewidmet.

Zeitschr. angew. Physik. Bd. 6.

der Stetigkeitsbedingungen der Felder bei endlich leitender Erde neben dem ursprünglich horizontalen Dipol noch ein „influenzierter“ vertikaler Doppeldipol angenommen werden mußte, der bei geringer Höhe der Antenne über der Erde ($h \ll \lambda$, λ Wellenlänge der ausgesendeten Schwingung) viel stärker war

als der ursprüngliche horizontale Dipol, so daß in der Ferne praktisch nur die Strahlung dieses Doppeldipols wirkte. Diese Strahlung war am stärksten in der Richtung der Horizontalantenne, und gleich Null in der Richtung quer dazu. Diese Theorie versuchte damit erstmals die Richtwirkung der geknickten Antenne von MARCONI aus dem Jahre 1906 zu erklären.

Wir wollen dieses Problem hier nochmals stellen, aber mit Berücksichtigung der Ionosphäre und der Tatsache, daß die Atmosphäre zwischen Erde und Ionosphäre einen sphärischen Hohlraum darstellt.

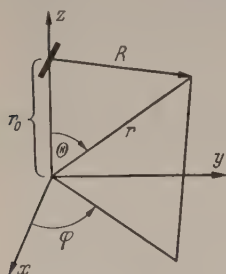


Abb. 1. Sphärisches Koordinatensystem.

Die Wellenlängen seien so groß, daß die Ionosphäre lediglich als Leiter mit Widerstand wirkt.

Um zunächst zu sehen, wie die Felder prinzipiell beschaffen sind, denken wir uns in einem sphärischen Koordinatensystem r, Θ, φ im Abstand r_0 vom Zentrum in der z -Achse einen horizontalen Dipol vom Strom J und der

Länge l parallel zur x -Achse angeordnet (Abb. 1).

Wenn das parallel zur x -Achse gerichtete HERTZsche Potential dieses Dipols mit der Zeitabhängigkeit $e^{j\omega t}$ durch

$$\left. \begin{aligned} \Pi &= A_0 \frac{1}{R} e^{-jkR}, \quad R = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \Theta}, \\ A_0 &= \frac{\mu_0}{4\pi k} J l, \quad k = \frac{\omega}{c} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

gegeben ist, so können wir dieses Potential $\bar{\Pi}$ in die drei Komponenten

$$\left. \begin{aligned} \Pi_r &= \Pi \cos \varphi \sin \Theta \\ \Pi_\Theta &= \Pi \cos \varphi \cos \Theta \\ \Pi_\varphi &= -\Pi \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

zerlegen, und nach den bekannten Regeln finden wir das Feld im Punkte $P(r, \Theta, \varphi)$ zu

$$B = k \operatorname{rot} \bar{\Pi}, \quad E = -j\omega k \bar{\Pi} - \frac{\omega}{k} \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{\Pi} \quad (3)$$

also

$$\left. \begin{aligned} B_r &= -\frac{k}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial \Theta} \cdot \sin \varphi, \quad B_\Theta = k \frac{\partial \Pi}{\partial r} \sin \varphi \\ B_\varphi &= k \left[\frac{\partial \Pi}{\partial r} \cos \Theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial \Theta} \sin \Theta \right] \cdot \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

und

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{\Pi} &= \left[\frac{\partial \Pi}{\partial r} \sin \Theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial \Theta} \cos \Theta \right] \cos \varphi \\ &= \frac{\partial \Pi}{\partial R} \frac{r}{R} \cos \varphi \sin \Theta \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} E_r &= -j\omega k \Pi \cos \varphi \sin \Theta - j\frac{\omega}{k} \frac{\partial}{\partial r} (\operatorname{div} \bar{\Pi}) \\ E_\Theta &= -j\omega k \Pi \cos \varphi \cos \Theta - j\frac{\omega}{k} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \Theta} (\operatorname{div} \bar{\Pi}) \\ E_\varphi &= j\omega k \Pi \sin \varphi - j\frac{\omega}{k} \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\operatorname{div} \bar{\Pi}) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Es erzeugt also der ungestörte Dipol alle 6 Feldkomponenten, von denen je 3, nämlich B_r, B_Θ, E_φ mit $\sin \varphi$ und B_φ, E_r und E_Θ mit $\cos \varphi$ multipliziert sind. Wir haben sozusagen zwei Wellenausbreitungen, eine am stärksten in der x (Dipol)-Richtung ($\cos \varphi$) und

eine zweite quer dazu in der y -Richtung ($\sin \varphi$). In großer Ferne $r \rightarrow \infty, R \rightarrow \infty$ verschwinden E_r, B_r und die radiale Strahlung wird durch die E_Θ, H_φ und E_φ, H_Θ besorgt und ergibt die üblichen bekannten Werte.

Wenn nun dieses Feld durch die Erde und die Ionosphäre begrenzt ist, werden wir es durch Eigenfunktionen dieses sphärischen Systems darzustellen haben. Am besten geschieht dies durch Einführung eines radialen Vektorpotentials [2], bzw. zweier solcher, wegen der $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ -Abhängigkeit der Feldgruppen, wie es zuerst G. MIE in der Theorie der Optik trüber Medien [3] und dann P. DEBYE in der Theorie des Lichtdrucks auf kleine Kugeln gemacht hat.

Führen wir ein radial gerichtetes Vektorpotential $\bar{\Pi}(r, \Theta, \varphi)$ ein und setzen

$$B = j\frac{k}{\omega} \operatorname{rot} \bar{\Pi} \quad \text{und} \quad E = k \bar{\Pi} + \frac{1}{k} \operatorname{grad} U,$$

so ergeben die MAXWELLSchen Gleichungen

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{\Pi} = k^2 \bar{\Pi} + \operatorname{grad} U.$$

Wird die r, φ , und Θ Komponente dieser Gleichung nachgeprüft, so ergibt sich

$$U = \frac{\partial \Pi}{\partial r} \quad \text{und mit} \quad \Pi = r \cdot u$$

hat u die bekannte Schwingungsgleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0.$$

zu erfüllen. Die Felder ergeben sich dann als

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \frac{1}{k} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + k^2 r u \right), \quad E_\Theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial r u}{\partial r} \right) \\ E_\varphi &= \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial r u}{\partial r} \right) \end{aligned} \right\}$$

und

$$\left. \begin{aligned} B_r &= 0, \quad B_\Theta = j\frac{k}{\omega} \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial r u}{\partial \varphi}, \\ B_\varphi &= -j\frac{k}{\omega} \frac{1}{r} \frac{\partial r u}{\partial \Theta}, \end{aligned} \right\}$$

wobei u nach Gl. (4) und (5) proportional $\cos \varphi$ setzen ist.

An den Grenzen müssen $E_\Theta, E_\varphi, B_\Theta$ und B_φ stetig sein, woraus folgt, daß

$$k \cdot r u \quad \text{und} \quad \frac{1}{k} \frac{\partial r u}{\partial r}$$

stetig sein muß. Es ist also $r u \cdot \frac{\partial r u}{\partial r}$ stetig.

Führen wir noch ein zweites radiales Vektorpotential ein, und bestimmen daraus

$$E = -j\omega \operatorname{rot} \bar{\Pi} \quad B = k^2 \bar{\Pi} + \operatorname{grad} U,$$

so folgt wieder

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{\Pi} = k^2 \bar{\Pi} + \operatorname{grad} U$$

und daraus

$$U = \frac{\partial \Pi}{\partial r} \quad \text{und mit} \quad \Pi = r v$$

muß v jetzt die Gleichung

$$\Delta v + k^2 v = 0$$

en. Hieraus folgen die Felder

$$\left. \begin{aligned} &= 0, \quad E_{\Theta} = -\frac{j \omega}{r \sin \Theta} \frac{\partial r v}{\partial \varphi}, \quad E_{\varphi} = j \frac{\omega}{r} \frac{\partial r v}{\partial \Theta}, \\ &= k^2 r v + \frac{\partial^2 r v}{\partial r^2}, \quad B_{\Theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \Theta} (r v), \\ &= \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} (r v), \end{aligned} \right\} (16)$$

von v diesmal proportional $\sin \varphi$ zu setzen ist. Aus den Grenzbedingungen folgt jetzt die Stetig-

$$r v \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial r} (r v), \quad (17)$$

daß wiederum $r v \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r v)$ stetig ist.

Funktionen u und v haben den Differentialgleichungen Gl. (9) und (15) zu genügen, deren Lösungen durch Summen von Ausdrücken von der Form

$$\sqrt{\frac{\pi}{2 k r}} Z_{n+\frac{1}{2}}(k r) \cdot P_n^m(\cos \Theta) \cdot e^{j m \varphi} \quad (18)$$

stellt werden, wobei $Z_{n+\frac{1}{2}}$ eine Besselsche Funktion der Ordnung $n + \frac{1}{2}$ und $P_n^m(\cos \Theta)$ die m -te ordnete tesserale Kugelfunktion ist. Wenn wir eine Abhängigkeit von φ in der Form $\cos \varphi$ bzw. annehmen, ist $m = 1$ zu setzen, und es ist

$$P_n^1(\cos \Theta) = -\frac{d}{d \Theta} P_n(\cos \Theta). \quad (19)$$

den wir

$$\left. \begin{aligned} \psi_n(\varrho) &= \sqrt{\frac{\pi}{2 \varrho}} J_{n+\frac{1}{2}}(\varrho) \quad \varrho = k r \\ \zeta_n^{1,2}(\varrho) &= \sqrt{\frac{\pi}{2 \varrho}} H_{n+\frac{1}{2}}^{1,2}(\varrho), \end{aligned} \right\} (20)$$

J die Besselfunktion 1. Art und $H_n^{1,2}$ die Hankelschen Funktionen 1. und 2. Art sind. Dann folgt aus der Differentialgleichung der Besselschen Funktionen für $\varrho \psi$ und auch für $\varrho \zeta^{1,2}$ die Differentialgleichung

$$\frac{1}{\varrho} \frac{d^2(\varrho \psi_n)}{d \varrho^2} + \left(1 - \frac{n(n+1)}{\varrho^2}\right) \psi_n = 0. \quad (21)$$

es ist also

$$\frac{d^2(\varrho \psi_n)}{d \varrho^2} + \psi_n \cdot \varrho = \frac{n(n+1)}{\varrho} \psi_n \quad (22)$$

man kann für E_r in Gl. (10) und B_r in Gl. (16) einsetzen

$$B_r = n(n+1) \frac{v}{r} \quad \text{und} \quad E_r = n(n+1) \frac{u}{k r}. \quad (23)$$

und u sind also durch den Verlauf von B_r bzw. E_r bestimmt. Insbesondere werden die Singularitäten von u bei $r \rightarrow r_0$, $\Theta \rightarrow 0$ durch den Verlauf dieser Felder in unmittelbarer Nähe des Dipols bestimmt werden.

Grenzbedingungen.

Wir setzen für den radialen Verlauf des Potentials

in der Luft

$$\zeta_n^1(k_1 r) + c_1 \zeta_n^2(k_1 r), \quad k_1 = \frac{\omega}{c} = \frac{2 \pi}{\lambda}$$

in der Ionosphäre

$$c_2 \zeta_n^2(k_2 r), \quad k_2 = \sqrt{\omega \mu \kappa_2} \exp\left(-j \frac{\pi}{4}\right)$$

in der Erde

$$c_3 \psi_n(k_3 r), \quad k_3 = \sqrt{\omega \mu \kappa_3} \exp\left(-j \frac{\pi}{4}\right)$$

κ_2 ist der Leitwert der Ionosphäre, κ_3 der Leitwert der Erde. ζ_n^2 tritt in der Ionosphäre auf wegen des nötigen Verschwindens im Unendlichen, ψ_n in der Erde, weil für $r = 0$ keine Singularität auftreten darf.

1. Stetigkeitsbedingung für u .

Dann folgt aus den Stetigkeitsbedingungen für $k r u$ und $\frac{1}{k} \frac{\partial r u}{\partial r}$ an der Grenze $r = a$, Erdoberfläche, und $r = b = a + H$, Grenze der Ionosphäre, mit

$$\left. \begin{aligned} \varrho_a &= k_1 a, \quad \varrho_b = k_1 b, \\ \eta_n^{1,2}(\varrho) &= \varrho \zeta_n^{1,2}(\varrho) = \sqrt{\frac{\pi \varrho}{2}} H_{n+\frac{1}{2}}^{1,2}(\varrho) \\ \chi_n(\varrho) &= \varrho \psi_n(\varrho) = \sqrt{\frac{\pi \varrho}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(\varrho) \end{aligned} \right\} (25)$$

$$\left. \begin{aligned} &\eta_n^{1'}(\varrho_a) \eta_n^{2'}(\varrho_b) - \eta_n^{1'}(\varrho_b) \eta_n^{2'}(\varrho_a) \\ &+ x [\eta_n^1(\varrho_b) \eta_n^{2'}(\varrho_a) - \eta_n^{1'}(\varrho_a) \eta_n^2(\varrho_b)] \\ &+ y [\eta_n^{1'}(\varrho_b) \eta_n^2(\varrho_a) - \eta_n^1(\varrho_a) \eta_n^{2'}(\varrho_b)] \\ &+ x y [\eta_n^1(\varrho_a) \eta_n^2(\varrho_b) - \eta_n^1(\varrho_b) \eta_n^2(\varrho_a)] = 0 \\ &x = \frac{k_1}{k_2} \frac{\eta_n^{2'}(k_2 b)}{\eta_n^2(k_2 b)}, \quad \text{und} \quad y = \frac{k_1}{k_3} \frac{\chi_n'(k_3 a)}{\chi_n(k_3 a)}. \end{aligned} \right\} (26)$$

Diese Formel, die zuerst von G. N. WATSON, Proc. Roy. Soc. 95, Ser. A. 546 (1919) aufgestellt wurde, in etwas einfacherer Form, nämlich $k_3 \rightarrow \infty$ gesetzt, d. h. den Leitwert der Erde unendlich genommen, $y = 0$, ist schon vom Verfasser in den Arbeiten [5] für sehr lange Wellen, d. h. sehr geringe Frequenzen diskutiert worden. Es muß für gegebenes Argument ϱ_a und ϱ_b bzw. für gegebenes $k_2 b$ und $k_3 a$ die Ordnung n der Besselfunktion bestimmt werden, damit die Gleichung erfüllt ist. Es ergibt sich allgemein, daß n nicht eine ganze Zahl, sondern eine beliebige komplexe Zahl ist. Da n auch die Ordnung der Kugelfunktion ist, bestimmt in dieser der reelle Teil von n die Ausbreitungsgeschwindigkeit und der imaginäre Teil von n die Dämpfung der ausgesendeten Wellen. Besonders wichtig ist, daß die Kugelfunktion $P_n(\cos \Theta)$ bei nicht ganzem n bei $\Theta \rightarrow \pi$ eine Singularität hat. P_n wird für $\Theta \rightarrow \pi$ logarithmisch unendlich, dagegen P_n^1 wie $\frac{1}{(\pi - \Theta)}$. Wird $P_n(-\cos \Theta)$ eingeführt, so liegt die Singularität bei $\Theta \rightarrow 0$ und ist physikalisch durch die dort vorhandene punktförmige Energiequelle bestimmt. Daher die von A. SOMMERFELD gewählte Bezeichnung „Singuläre Eigenfunktion“. In unserem Fall zeigt sich, daß es eine Lösung der Gleichung gibt, die bis zur Frequenz Null herab, d. h. für beliebig lange Wellen gilt (Grundfeld) [5]. Es gibt aber auch noch Lösungen, die nur oberhalb gewisser Frequenzen möglich sind (Oberfelder), die nach einer anderen Näherungsmethode bestimmt werden können [6].

2. Stetigkeitsbedingung für v .

Werden für dieselben Funktionen wie oben die Grenzbedingungen für die v -Funktion, nämlich

$$r \cdot v \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial r} (r v)$$

stetig bei $r = a$ und $r = b$ festgesetzt, so ergibt sich als

Bestimmungsgleichung

$$\left. \begin{aligned} & \eta_n^1(\varrho_a) \eta_n^2(\varrho_b) - \eta_n^1(\varrho_b) \eta_n^2(\varrho_a) \\ & + x [\eta_n^{1'}(\varrho_b) \eta_n^2(\varrho_a) - \eta_n^1(\varrho_a) \eta_n^{2'}(\varrho_b)] \\ & + y [\eta_n^1(\varrho_b) \eta_n^{2'}(\varrho_a) - \eta_n^{1'}(\varrho_a) \eta_n^2(\varrho_b)] \\ & + x y [\eta_n^{1'}(\varrho_a) \eta_n^{2'}(\varrho_b) - \eta_n^{1'}(\varrho_b) \eta_n^{2'}(\varrho_a)] = 0, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

wo jetzt

$$x = \frac{k_1}{k_2} \frac{\eta_n^2(k_2 b)}{\eta_n^2(k_2 a)} \quad \text{und} \quad y = \frac{k_1}{k_3} \frac{\chi(k_3 a)}{\chi'(k_3 a)}.$$

Untersucht man diese Gleichung nach der gleichen Näherungsmethode wie in [5] für sehr lange Wellen, so zeigt sich, daß es für diese überhaupt keine Lösung gibt. Es ist kein Grundfeld bis zur Frequenz Null herab möglich, im Gegensatz zum ersten Fall. Erst bei bestimmten unteren Grenzfrequenzen treten reelle Werte von n auf (wenn x und $y \rightarrow 0$ gehen), bzw. bei endlichen Werten von κ_2 und κ_3 dazugehörige imaginäre Anteile. Näherungsweise sind diese Werte in [6] bestimmt worden. Auch die Bestimmung der Konstanten c_1 , c_2 und c_3 der Gl. (24) ist durch die gefundenen n gegeben. Die Ausbreitung des v -Typs erfolgt also mit anderen Wellenformen als die des u -Typs.

Ist durch die Grenzbedingungen der radiale Verlauf der Funktionen u und v in der Erde, in der Luft und in der Ionosphäre gegeben, so kann man ansetzen:

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_n D_n f_n(kr) \cdot P_n^1(-\cos \Theta) \cos \varphi \\ v &= \sum_n E_n g_n(kr) \cdot P_n^1(-\cos \Theta) \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

wobei $f_n(kr)$ und $g_n(kr)$ die in Gl. (24) angegebenen Funktionen in den drei Räumen bedeuten. Die Faktoren D_n und E_n können bestimmt werden aus der Tatsache, daß die f_n und die g_n für die verschiedenen n -Werte zueinander orthogonal sind. Dies folgt aus der Differentialgleichung, Gl. 22:

$$\varrho \frac{d^2(\varrho \psi_n)}{d\varrho^2} + [\varrho^2 - n(n+1)] \psi_n = 0,$$

die auch für die f_n und g_n in allen drei Räumen gilt, in der Form

$$r \frac{d^2(r f_n)}{dr^2} + [k^2 r^2 - n(n+1)] f_n = 0. \quad (29)$$

Für zwei verschiedene Werte n und m leitet man daraus ab

$$\left. \begin{aligned} & [n(n+1) - m(m+1)] \int_0^\infty f_n f_m dr \\ & = \left| r f_m \frac{\partial(r f_n)}{\partial r} - r f_n \frac{\partial(r f_m)}{\partial r} \right|_0^\infty \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Da die Funktionen f und g sowohl für $r=0$, als auch für $r=\infty$ verschwinden und die Grenzen bei $r=a$ und $r=b$ nach Gl. (11) und (17) keinen Beitrag zum Integral liefern, ist das Integral

$$\int_0^\infty f_n f_m dr = 0.$$

Die Normierungsintegrale für $m=n$

$$N_n = \int_0^\infty f_n^2 \cdot dr \quad \text{und} \quad M_n = \int_0^\infty g_n^2 \cdot dr \quad (31)$$

lassen sich einfach berechnen, wenn der Verlauf und g_n bekannt ist.

Wegen der erwähnten Orthogonalität ist

$$\int_0^\infty u f_n(kr) \cdot dr = D_n \cdot N_n P_n^1(-\cos \Theta) \cos \varphi$$

wobei nach Gl. (23)

$$u = k r \frac{1}{n(n+1)} E_r \quad \text{bzw.} \quad v = \frac{r}{n(n+1)} B_r.$$

Um u und v an die Singularität des Dipols anzupassen müssen E_r und B_r in unmittelbarer Nähe des L bekannt sein. Rechnet man diese Nahfelder aus, entsteht

$$E_r = -j \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{J l \cos \varphi \sin \Theta}{R^5} (2r^2 - r_0^2 - r r_0 \cos \Theta)$$

und

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} J l \sin \varphi \sin \Theta \frac{r_0}{R^3}.$$

Da $P_n^1(-\cos \Theta)$ für $\Theta \rightarrow 0$ gegen ∞ geht und E_r und B_r ebenfalls bei $r \rightarrow r_0$, $\Theta \rightarrow 0$, kann man D_n nach Gl. finden als

$$D_n N_n = \lim_{\Theta \rightarrow 0} \frac{1}{P_n^1(-\cos \Theta) \cdot \cos \varphi} \int_0^\infty u \cdot f_n(kr) dr,$$

indem man das Integral nur in unmittelbarer Nähe von $r=r_0$ ausrechnet und Θ gegen Null gehen läßt, so daß

$$D_n N_n = \frac{f_n(kr_0)}{\cos \varphi} \lim_{\Theta \rightarrow 0} \frac{1}{P_n^1(-\cos \Theta)} \int_{r_0(1-\epsilon)}^{r_0(1+\epsilon)} u dr, \quad \epsilon \ll 1.$$

Setzt man $r = r_0(1+\eta)$, $\eta \ll 1$, $dr = r_0 d\eta$, und Θ sehr klein voraus, so wird $R^2 = r_0^2(\eta^2 + 1)$ und $2r^2 - r_0^2 - r r_0 \cos \Theta = r_0^2 \frac{\Theta^2}{2} + 3r_0^2 \eta + 2r_0^2$. Dann wird nach Gl. (35)

$$D_n N_n = \frac{f_n(kr_0)}{\cos \varphi} \frac{kr_0}{n(n+1)} \lim_{\Theta \rightarrow 0} \frac{1}{P_n^1(-\cos \Theta)} \cdot \int_{r_0(1-\epsilon)}^{r_0(1+\epsilon)} E_r dr$$

und analog

$$E_n M_n = \frac{g_n(kr_0)}{\sin \varphi} \frac{r_0}{n(n+1)} \lim_{\Theta \rightarrow 0} \frac{1}{P_n^1(-\cos \Theta)} \int_{r_0(1-\epsilon)}^{r_0(1+\epsilon)} B_r dr$$

Nun ist in Gl. (36) das Integral

$$\int E_r dr = -j \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{J l}{\omega} \cos \varphi \cdot \Theta \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \left[r_0^2 \frac{\Theta^2}{2} + 3r_0^2 \eta \right] \frac{r_0 d\eta}{r_0^5(\eta^2 + \Theta^2)^{3/2}}$$

und

$$\int B_r dr = \frac{\mu_0}{4\pi} J l \sin \varphi \cdot \Theta \cdot \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{r_0^2 d\eta}{r_0^5(\eta^2 + \Theta^2)^{3/2}}.$$

Nun ist

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{d\eta}{(\eta^2 + \Theta^2)^{3/2}} &= \frac{\eta}{\Theta^2 \sqrt{\Theta^2 + \eta^2}} \\ \int \frac{\eta d\eta}{(\eta^2 + \Theta^2)^{3/2}} &= -\frac{1}{3} \frac{1}{(\Theta^2 + \eta^2)^{3/2}} \\ \int \frac{d\eta}{(\eta^2 + \Theta^2)^{3/2}} &= \frac{1}{\Theta^4} \frac{\eta}{(\Theta^2 + \eta^2)^{3/2}} (3\Theta^2 + 2\eta^2), \end{aligned} \right\}$$

wird

$$E_r dr = -j \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{J l}{\omega} \frac{\Theta}{r^2} \cos \varphi \times$$

$$\times \left[\frac{1}{2 \Theta^2} \frac{\eta}{(\Theta^2 + \eta^2)^{3/2}} \cdot (3 \Theta^2 + \eta^2) - \frac{1}{(\Theta^2 + \eta^2)^{3/2}} \right] + \epsilon$$

man hierin $\Theta \rightarrow 0$ gehen, d. h. ist $\Theta \ll \epsilon$, so wird

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} E_r dr = -j \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{J l}{\omega} \cos \varphi \cdot \frac{2}{\Theta \cdot r_0^2}$$

analog

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} B_r dr = \frac{\mu_0}{4 \pi} J l \cdot \sin \varphi \cdot \frac{\Theta}{r_0} \left[\frac{\eta}{\Theta^2 \sqrt{\Theta^2 + \eta^2}} \right] + \epsilon$$

für $\Theta \ll \epsilon$

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} B_r dr = \frac{\mu_0}{4 \pi} \cdot J l \cdot \sin \varphi \cdot \frac{2}{\Theta r_0}$$

wohl $\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} E_r dr$ wie $\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} B_r dr$ werden unendlich wie $\frac{1}{\Theta}$.

ererseits wird nach [7] die Singularität von $P_n^1(\cos \Theta)$ $\Theta \rightarrow \pi$

$$\cos \Theta) = \frac{d}{d \Theta} P_n(\cos \Theta) = \frac{\sin n \pi}{\pi} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{\delta d \tau}{(\tau^2 + \delta^2)^{3/2}}$$

$$) = \pi - \Theta, \quad = \frac{\sin n \pi}{\pi} \left[\frac{\tau}{\delta \sqrt{\delta^2 + \tau^2}} \right] + \epsilon$$

für $\delta \ll \epsilon$

$$P_n^1(\cos \Theta) \rightarrow \frac{\sin n \pi}{\pi} \cdot \frac{2}{\delta}$$

$\cos \Theta)$ wird also, wie gesagt, unendlich wie $\frac{1}{\Theta}$, also die gleiche Art wie die Integrale oben.

Also folgt aus Gl. (36)

$$D_n N_n = -j \cdot f_n(k r_0) \frac{k r_0}{n(n+1)} \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{J l}{\omega} \frac{1}{r_0^2} \frac{\pi}{\sin n \pi}$$

und

$$E_n M_n = g_n(k r_0) \frac{r_0}{n(n+1)} \frac{\mu_0}{4 \pi} J l \frac{1}{r_0} \frac{\pi}{\sin n \pi} \cdot \quad (38)$$

Damit sind die beiden Potentiale u und v vollkommen bekannt:

$$u = \sum_n -j \cdot \frac{1}{N_n} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{J l}{4 r_0} \frac{1}{n(n+1)} \times \frac{1}{\sin n \pi} f_n(k r_0) \cdot f_n(k r) P_n^1(-\cos \Theta) \cdot \cos \varphi$$

$$v = \sum_n \frac{1}{M_n} \frac{\mu_0}{4} \frac{J l}{n(n+1)} \times \frac{1}{\sin n \pi} g_n(k r_0) g_n(k r) \cdot P_n^1(-\cos \Theta) \cdot \sin \varphi. \quad (39)$$

Zusammenfassung.

Es werden die beiden HERTZschen radial gerichteten Potentiale bestimmt, die die Wellenausbreitung eines horizontalen Dipols in einem sphärischen Hohlraum bestimmen. In dem im nächsten Heft erscheinenden II. Teil werden die aus diesen Potentialen folgenden elektrischen und magnetischen Felder für Grund- und Oberfelder diskutiert.

Literatur. [1] SOMMERFELD, A.: Partielle Differentialgleichungen der Physik, Leipzig 1947, S. 244 u. 260; HÖRSCHELMANN, H. v.: Jahrbuch f. drahtl. Tel. 5, 158 (1912). — [2] SOMMERFELD, A.: Differentialgleichungen der Physik, Franck — v. Mises, 2. Aufl., 1935, F. Vieweg, S. 871. — [3] MIE, G.: Ann. d. Phys. 25, 377 (1908). — [4] DEBYE, P.: Ann. d. Phys. 30, 57 (1909). — [5] SCHUMANN, W. O.: Il Nuovo Cimento, Vol. IX, 1116 (1952), SCHUMANN, W. O.: Naturwiss. 39, 475 (1952); SCHUMANN, W. O.: Z. angew. Phys. 4, 474 (1952. — [6] SCHUMANN, W. O.: Naturwiss. 40, 504 (1953). SCHUMANN, W. O.: Z. angew. Phys. 6, 35 (1954). — [7] SOMMERFELD, A.: Partielle Differentialgleichungen der Physik, S. 159.

Prof. Dr. WINFRIED OTTO SCHUMANN,
Elektrophysikalisches Institut der T. H. München.

Temperaturmessungen an Raketenstrahlen*.

Von FRITZ RÖSSLER**.

Mit 4 Textabbildungen.

(Eingegangen am 26. Dezember 1953.)

Temperaturmessungen an Flammen geben Auf-
 laß über den Ablauf der chemischen Reaktionen.
 er war es von Interesse, auch an Raketenstrahlen
 artige Messungen auszuführen. Das Spektrum
 s solchen Strahles besteht größtenteils aus der Na-
 ie ohne nennenswerten kontinuierlichen Untergrund.
 n kann eine Temperaturmessung daher mittels der
 inenumkehrmethode vornehmen. Die Brenndauer
 s Strahles ist jedoch verhältnismäßig kurz, was be-
 ders von den kleinen Modellraketen mit einer Bren-
 ner von einigen Zehntel-Sekunden gilt, wie sie von
 verwandt worden sind. Die übliche Linienum-
 rmethode mußte daher in der Weise modifiziert
 den, daß keine Abgleichung mehr vorzunehmen
 , sich diese vielmehr nachträglich aus einer Regi-

strierung ablesen ließ. Eine solche Anordnung ist frü-
 her [1] angegeben worden. Die zur Linienumkehr-
 methode benötigte Hilfslichtquelle wird mittels rotie-
 renden Polarisationsfilters vollständig durchmoduliert
 und das Ergebnis hinter dem Monochromator auf
 rotierendem Film aufgenommen, so daß man den Mo-
 ment der Linienumkehr und damit die zugehörige
 schwarze Temperatur der Hilfslichtquelle nachträglich
 festlegen kann.

Um überhaupt ein Leuchten des Strahles zu errei-
 chen, war es notwendig, eine einfache Öffnung als Aus-
 strömdüse zu verwenden, die an der Stelle des engsten
 Querschnittes endigte und keine Erweiterung mehr be-
 saß. Dadurch blieb natürlich auf Kosten der kine-
 tischen Energie des Strahles die Temperatur des Strah-
 les so hoch, daß das ausströmende Gas ausreichend
 leuchtete und eine Temperaturmessung überhaupt erst
 möglich wurde. Im übrigen wurde als Treibmittel eine
 Stange nitroglycerinhaltiges Pulver (SD 21) verwendet,

* Herrn Prof. Joos mit den besten Glückwünschen zum
 Geburtstage gewidmet.
 * Mitarbeiter an einem französischen Wehrforschungs-
 tut.

die in der Mitte durchbohrt war. Diese Stange füllte das Innere der Rakete nahezu vollständig aus. Die „Klemmung“, das ist das Verhältnis von Pulveroberfläche zur Fläche der Düsenöffnung, betrug 700.

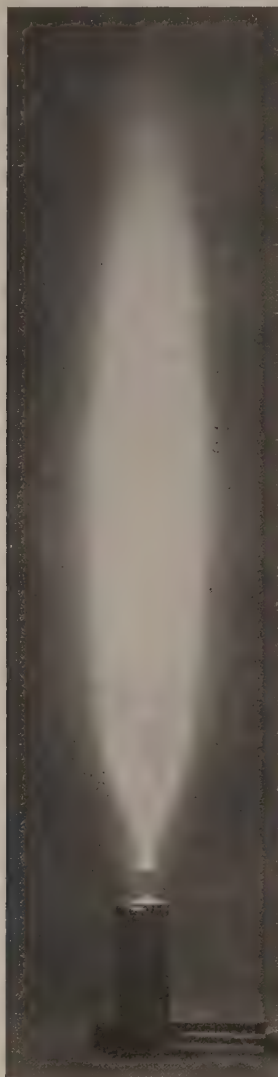


Abb. 1. Raketenstrahl in Luft.

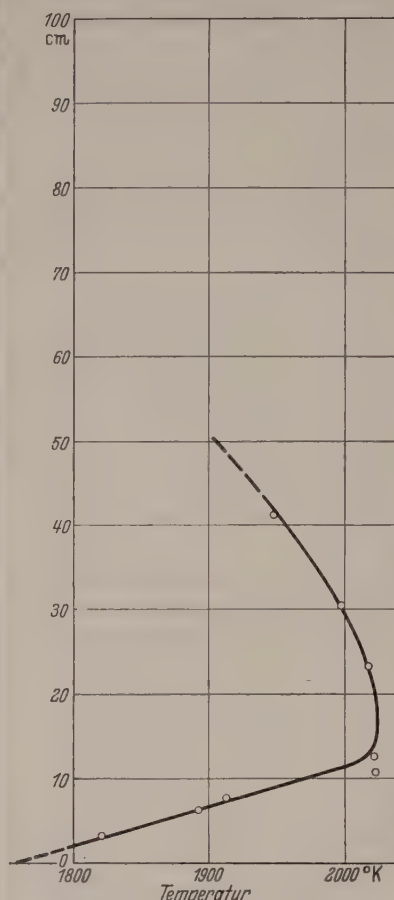


Abb. 3. Temperaturverteilung im Raketenstrahl.

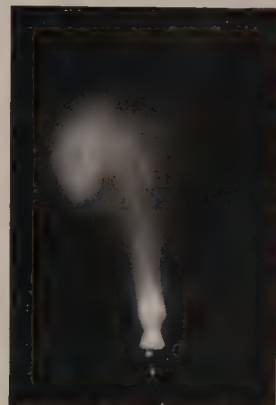


Abb. 4. Raketenstrahl in Kohlensäure.



Abb. 2. Momentbilder eines Raketenstrahles.

Eine Aufnahme des Strahles bei geöffnetem Objektiv ergibt ein mittleres Bild des Strahles (Abb. 1). In das momentane Bild davon wesentlich abweichend, gegen Aufnahmen mittels einer Zeitlupenkamera mit einer Bilderzahl von 3000/sec und einer Belichtungszeit von 200 μ s (2 Einzelbilder sind in Abb. 2 wieder gegeben). Beim Vorführen des Filmes hat man durch die turbulente Bewegung den Eindruck eines flackernden Kaminfeuers. In verschiedenen Höhen des Raketenstrahles wurden Temperaturmessungen nach der Nienumkehrmethode ausgeführt und die erhaltenen Werte [2] eingetragen (Abb. 3). Selbstverständlich mußte zur Messung jedes einzelnen Punktes jeweils ein neuer Strahl verwendet werden. Da aber die Strahlen in ihrem Ablauf, ihrer Form und, wie die Messungen zeigten, auch ihre Temperatur vollständig reproduzierbar waren, konnte in dieser Wei-

vorgangen werden. Während der jeweiligen Abbranddauer erwies sich die Temperatur als konstant, wenn man von einer geringfügigen Temperaturerhöhung gegen Ende der Verbrennung [1] absieht. Auch von der Eigentemperatur des Pulvers hängt die Strahltemperatur nicht ab (verifiziert innerhalb der Grenzen -2° und $+50^\circ$ C). Auffällig ist an den Temperaturwerten, daß sie zunächst nach dem Austritt aus der Düse bis zu einem Maximalwerte anwachsen, um dann wieder abzufallen. Der anfängliche Temperaturanstieg ist offenbar durch eine sekundäre Verbrennung der noch brennbaren gasförmigen Bestandteile (CO und H_2) mit dem durch Turbulenz hereingewirbelten Sauerstoff der Luft hervorgerufen. Der spätere Abfall ist dann durch Ausstrahlung und durch Abkühlung durch die eingewirbelte Luft bedingt. Das Bild der Verbrennung wird sofort ein anderes, wenn man den Strahl in einen Cellonzylinder hineinschießt, der mit Kohlensäure gefüllt ist (Abb. 4). Man erkennt deutlich, daß die einhüllende Sekundärverbrennung jetzt fortgefallen ist¹ und daß sich eine Struktur ausgebildet hat, wie sie in solchen Fällen bereits bekannt ist [3]. Die von de-

¹ Die leuchtende Wolke im oberen Teil der Figur rührt von einer späteren schwachen Nachverbrennung her, die auftritt, nachdem die Cellonhülle fortgeschleudert worden ist.

ng ausgehenden Verdünnungswellen werden am
lenrand reflektiert und bilden durch Zusammen-
n Gebiete höheren Druckes und höherer Tempe-
a der Temperaturanstieg offenbar linear mit der
erfolgt, ist es möglich, ihn nach rückwärts zu extra-
en. Das führt zu einer Temperatur von 1760° K
Austrittsöffnung des Strahles. Die Berechnung
er Wärmetönung der Reaktion führt zu einer
eratur von 1770° K, also zu einer recht guten
Einstimmung. Ob diese zufällig ist oder tieferen
nmenhängen entspricht, muß offen bleiben. Je-
lls scheint die Extrapolation berechtigt zu sein.
ase strömen aus der Öffnung mit Schallgeschwin-
it aus, die sich für die angegebene Temperatur
ie dort herrschende Gaszusammensetzung (mitt-
Molekulargewicht: 28,8) zu 965 m/sec ergibt. In
Maße, wie Luft seitlich eingewirbelt wird, kann
ekundärverbrennung vor sich gehen. Es ist daher
konstante Temperaturzuwachs von 21 grad/cm
damit von 2.10⁶ grad/sec im linearen Teil des An-
es ein Maß für die seitlich turbulent einströmende
menge und damit des Reaktionsprozesses. Vom
plaustritt bis zum Erreichen der Maximaltempe-
vergehen 10⁻⁴ sec. Rechnet man die Temperatur
die durch die vollständige Verbrennung von CO
H₂ hervorgerufen werden könnte, so zeigt es sich,

daß diese mit etwa 2700° K erheblich größer als die
gemessene ist. Die freiwerdende Wärme reicht also
jedenfalls aus, um die gemessene Temperaturerhöhung
hervorzurufen. Daß die gemessene Maximaltemperatur
so erheblich unter der theoretisch möglichen bleibt,
könnte daran liegen, daß mehr Luft in den Strahl ein-
gewirbelt wird, als zur vollständigen Verbrennung
notwendig wäre.

Eine eingehende Diskussion mit meinem Kollegen
Dr. BEHRENS hat wesentlich zur Klärung der Probleme
beigetragen.

Zusammenfassung.

Nach einer auf kurzzeitige Vorgänge anwendbar
gemachten Linienumkehrmethode werden die Tempe-
raturen an verschiedenen Stellen eines Raketenstrahles
gemessen. Ein mit der Höhe linear gehender Tempera-
turanstieg rührt von Sekundärverbrennung der noch
brennbaren Gase des Strahles mit der durch Turbulenz
in den Strahl gewirbelten Luft her. Eine Abschätzung
für die Verbrennungsdauer wird angegeben.

Literatur. [1] RÖSSLER, F.: Z. angew. Phys. 4, 22 (1952).
— [2] RÖSSLER, F.: Comptes rendus des conférences sur les
problèmes de la combustion — la détonation — les ondes de
choc, 28. 10. 1951, S. 125. — [3] PRANDTL, L.: Führer durch
die Strömungslehre. Braunschweig 1949, Abb. 215 und 238. —

Dr. Fritz Rößler, Weil am Rhein, Unterbaselweg 27.

Berichte.

Über die Beschreibung stationärer statistischer Funktionen*.

Von RICHARD BECKER, Göttingen.

(Eingegangen am 30. Dezember 1953.)

Bei der Beschreibung von Vorgängen, welche der
Bewegung unterworfen sind, braucht man Funk-
tionen, deren Verlauf im einzelnen nicht interessiert,
sondern statt dessen nur gewisse Mittelwerte von
physikalischem Interesse sind. Beispiele sind der zeit-
liche Verlauf des von einer Glühkathode ausgehenden
Strahles oder die Geschwindigkeit eines der BROW-
N-Bewegung unterworfenen Teilchens oder die
elektrische Feldstärke in der Hohlraumstrahlung.
Im folgenden sollen zunächst einige allgemeine
Eigenschaften von statistischen Funktionen zusam-
gestellt werden. Anschließend wird gezeigt, wie
unter Ausnutzung der so gewonnenen Relationen —
eine ganze Reihe von statistischen Phänomenen einer
sehr einfachen Behandlung zugänglich wird.
Die nachstehenden Überlegungen gehen weder im
mathematischen noch im physikalischen Teil über bis-
bekanntes hinaus. Neu ist allenfalls die Art der
Darstellung und deren Ausnutzung zur Ablei-
tung wichtiger Zusammenhänge.

a) Das mathematische Schema [4]. Die reelle Funk-
tion $A(t)$ sei nur in dem von $-t_0/2$ bis $+t_0/2$ reichenden
Bereich von Null verschieden. Der Mittelwert von A
ist gleich Null. Wir stellen uns vor, daß A im einzelnen
stetig unregelmäßig verläuft, daß aber $A(t)$ im Gro-
ßen gesehen doch einen „stationären“ Verlauf habe, in
dem Sinne, daß der „Habitus“ von A im ganzen Inter-
val von $-t_0/2$ bis $+t_0/2$ der gleiche sei. Wir beschrei-

ben $A(t)$ durch das FOURIER-Integral

$$A(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \text{mit} \quad C(-\omega) = C^*(\omega), \quad (1)$$

alsdann ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |C(\omega)|^2 d\omega.$$

Division mit der oben erklärten Zeit t_0 gibt das zeit-
liche Mittel

$$\overline{A^2} = \frac{1}{t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 dt = \frac{2}{t_0} \int_0^{\infty} |C(\omega)|^2 d\omega.$$

Mit der Abkürzung

$$A_\omega^2 = \frac{2}{t_0} |C(\omega)|^2 \quad (2)$$

haben wir damit die spektrale Zerlegung der statisti-
schen Funktion $A(t)$:

$$\overline{A(t)^2} = \int_0^{\infty} A_\omega^2 d\omega. \quad (3)$$

Die Korrelation. Wir bilden das Produkt von $A(t)$
mit $A(t + \tau)$, also mit dem Wert von A zu der um τ
späteren Zeit. Den über t gemittelten Wert dieses Pro-
duktes nennen wir Korrelation

$$\Phi(\tau) = \overline{A(t) A(t + \tau)}. \quad (4)$$

$\Phi(\tau)$ ist nur für kleine, für die Reichweite der Korre-
lation charakteristische Zahlenwerte von τ wesentlich

* Herrn G. Joos zum 60. Geburtstag gewidmet.

von Null verschieden. Mit der FOURIER-Entwicklung (1) von A hat man

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} A(t) A(t+\tau) dt &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \int C(\omega) C^*(\omega') e^{i(\omega-\omega')\tau} e^{-i\omega'\tau} d\omega d\omega'. \end{aligned}$$

Ausführung der Integrationen nach t und ω' liefert als Zusammenhang zwischen Korrelation und spektraler Verteilung

$$\Phi(\tau) = \int_0^\infty A_\omega^2 \cos(\omega \tau) d\omega. \quad (5)$$

Daraus folgt umgekehrt

$$A_\omega^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\tau) \cos(\omega \tau) d\tau. \quad (6)$$

Korrelation und spektrale Verteilung sind im Sinne von (5) und (6) FOURIERtransformierte voneinander. Ist speziell die Reichweite der Korrelation gleich Null, so hat $\Phi(\tau)$ die Gestalt einer δ -Funktion:

$$\begin{aligned} \Phi(\tau) &= \psi \delta(\tau) \quad \text{mit} \quad \int \delta(\tau) d\tau = 1 \\ \text{und} \quad \delta(\tau) &= 0 \quad \text{für} \quad \tau \neq 0. \end{aligned}$$

In diesem Fall wird A_ω^2 von ω unabhängig. Wir haben ein weißes Spektrum mit

$$A_\omega^2 = \frac{1}{\pi} \psi.$$

Als nächstes bilden wir das über eine feste Zeit ϑ

erstreckte Integral $\int_t^{t+\vartheta} A(t) dt$. Ist A eine Geschwindigkeit, so ist dieses Integral der in der Zeit ϑ zurückgelegte Weg. Ist A eine Kraft, so ist es der in der gleichen Zeit übertragene Impuls. Wir bilden den Mittelwert des Quadrates

$$\left(\int_t^{t+\vartheta} A(t) dt \right)^2.$$

Bei der Berechnung beschränken wir uns auf den Fall, daß das Integrationsintervall ϑ groß ist gegenüber der Reichweite der Korrelation. Als dann erweist sich der gesuchte Mittelwert als proportional zu ϑ . Wir definieren die Größe

$$G = \frac{1}{\vartheta} \overline{\left(\int_t^{t+\vartheta} A(t) dt \right)^2}. \quad (7)$$

G ist gleich dem Integral über die Korrelationsfunktion, es gilt also

$$G = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\tau) d\tau. \quad (8)$$

Zum Beweis betrachte man das Doppelintegral

$$\left(\int_t^{t+\vartheta} A(t) dt \right)^2 = \int \int A(t') A(t'') dt' dt''$$

zu erstrecken über ein Quadrat der Kantenlänge ϑ in der t' - t'' -Ebene. Mit den neuen Variablen $u = t' + t''$ und $v = t' - t''$ wird das Integral

$$\int \int A\left(\frac{u}{2} + \frac{v}{2}\right) A\left(\frac{u}{2} - \frac{v}{2}\right) \frac{1}{2} du dv.$$

Bei der Integration nach u , d. h. entlang einer Parallelen zur Diagonalen gibt wegen der vorausgesetzten kurzen Reichweite der Korrelationsfunktion nur ein schmaler Streifen entlang der Diagonale einen von

Null verschiedenen Beitrag; u läuft dabei von $2t$ bis $2t + 2\vartheta$. Also wird

$$\left(\int_t^{t+\vartheta} A(t) dt \right)^2 = \vartheta \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(v) dv,$$

wie in (8) behauptet.

Hat wiederum die Korrelation die Reichweite Null ist also $\Phi(\tau) = \psi \cdot \delta(\tau)$, so sind Korrelation, die (7) erklärte Größe G und spektrale Verteilung durch die einfache Beziehung

$$G = \psi = \pi A_\omega^2$$

miteinander verknüpft.

Wir behandeln nunmehr einige Anwendungen dieser Relationen.

b) *Der Schroteffekt.* Wir betrachten den im Sättigungsgebiet von der Glühkathode zur Anode übergehenden Strom $J(t)$ mit dem zeitlichen Mittel \bar{J} . I Abweichung

$$J'(t) = J(t) - \bar{J}$$

sei ein erstes Beispiel für unsere statistische Funktion. Bezeichnen wir mit ν die Zahl der während eines bestimmten vorgehobenen Zeitintervalles ϑ übergehenden Elektronen und mit n die im Mittel je Sekunde übergehende Elektronenzahl, so wird $\bar{J} = e n$ und $\bar{\nu} = n \vartheta$. Dann erhalten wir für die in der Zeit ϑ übergehende Ladung

$$\int_t^{t+\vartheta} J'(t) dt = e(\nu - n\vartheta),$$

also

$$\overline{\left(\int_t^{t+\vartheta} J'(t) dt \right)^2} = e^2(\bar{\nu}^2 - \bar{\nu}^2).$$

Nach dem Grundgesetz der Statistik unabhängig Ereignisse ist aber

$$\bar{\nu}^2 - \bar{\nu}^2 = \bar{\nu} = \frac{\bar{J}}{e} \vartheta.$$

Damit haben wir die in (7) definierte Größe G ermittelt

$$G = \frac{1}{\vartheta} \overline{\left(\int_t^{t+\vartheta} J' dt \right)^2} = e \bar{J}. \quad (1)$$

Die zu J gehörige Korrelation ist entscheidend bestimmt durch Flugdauer eines Elektrons von der Kathode zur Anode. Solange diese Flugdauer klein ist gegenüber der Schwingungsdauer $\frac{1}{\omega}$ des uns interessierenden Frequenzgebietes, dürfen wir $\Phi(\tau)$ als δ -Funktion ansehen und haben damit aus (9) unmittelbar die spektrale Verteilung des Stromes J' .

$$J_\omega'^2 = \frac{1}{\pi} e \bar{J}.$$

Bei Übergang zu der in den Anwendungen oft benutzten ν -Skala ($\omega = 2\pi\nu$; $J_\omega^2 d\omega = J_\nu^2 d\nu$) haben wir damit die bekannte zuerst von SCHOTTKY angegebene Formel für das Frequenzspektrum des Schroteffektes.

$$J_\nu'^2 d\nu = 2 e \bar{J} d\nu,$$

gültig für alle Frequenzen, welche klein sind gegenüber der reziproken Flugdauer der Elektronen.

c) *Die BROWNSche Bewegung.* Ein kolloidales Teilchen der Masse m stehe bei der Temperatur T unter der Einwirkung der umgebenden Flüssigkeitsmoleküle. v sei die x -Komponente seiner Schwerpunktschwindigkeit. Die x -Komponente der Kraft, welche die umgebende Flüssigkeit auf das Teilchen ausübt, schreibe

der Form

$$m A(t) - m \beta v. \quad (12)$$

In diesen Ansatz pflegt man nach dem Vorgang von EINSTEIN den systematischen, mit v proportionalen Anteil $m \beta v$ abzuspalten. Der verbleibende statistische Anteil $m A(t)$ soll im Mittel gleich Null auch bei Mittelung über solche Teilchen, welche die gleiche Geschwindigkeit haben. Unter der Wirkung der Kraft (12) muß sich als Mittelwert der kinetischen Energie unseres Teilchens der Wert

$$\frac{m}{2} \overline{v^2} = \frac{1}{2} k T \quad (13)$$

erhalten.

Nach (12) folgende Bewegungsgleichung

$$\dot{v} + \beta v = A(t) \quad (14)$$

die sich sogleich nach t (etwa von t bis $t + \tau$) integriert:

$$v(t + \tau) = v(t) e^{-\beta \tau} + e^{-\beta(t + \tau)} \int_t^{t + \tau} e^{\beta t'} A(t') dt'.$$

Multiplikation mit $v(t)$ und Mittelung über t (bei τ) folgt wegen der statistischen Unabhängigkeit der rechtsstehenden Integrals von dem seiner unteren Grenze t entsprechenden Wert von $v(t)$:

$$\overline{v(t) v(t + \tau)} = \overline{v(t)^2} e^{-\beta \tau} \quad \text{für positive } \tau.$$

Dem durch (13) vorgeschriebenen Wert von $\overline{v^2}$ kann wir damit die Korrelation¹ für die statistische Funktion $v(t)$ gefunden:

$$\Phi(\tau) = \frac{k T}{m} e^{-\beta |\tau|}. \quad (15)$$

Es erweist sich als besonders bequemer Ausgangspunkt für weitere Folgerungen. Als solche geben wir

das mittlere Verschiebungsquadrat. Der in der Zeit

von t bis $t + \vartheta$ zurückgelegte Weg x ist $\int_t^{t + \vartheta} v dt$. Mit

den in (7) als G bezeichneten Größe wird also

$$\overline{x^2} = \vartheta G = \vartheta \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\tau) d\tau.$$

Soeben in (15) erhaltene Wert von Φ liefert somit

$$\overline{x^2} = \vartheta \frac{2 k T}{m \beta} = \vartheta 2 k T B,$$

was wir in üblicher Weise die Beweglichkeit $B = \frac{1}{m \beta}$ schreiben. Das ist aber die bekannte EINSTEINSche Relation $D = k T B$ zwischen Diffusion und Bewegungszeit.

Die spektrale Zerlegung v_{ω}^2 von $v(t)$ läßt sich aus (6) (15) unmittelbar entnehmen. Wir erhalten

$$v_{\omega}^2 = \frac{2 k T}{m \pi} \int_0^{\infty} e^{-\beta \tau} \cos(\omega \tau) d\tau,$$

Ausführung der Integration also

$$v_{\omega}^2 = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{k T}{m \beta} \frac{1}{1 + \omega^2 / \beta^2}. \quad (16)$$

Die Formel wird uns nachher eine modellmäßige Beschreibung des Widerstandsrauschens ermöglichen. Zu-

Auf diese Korrelation wurde ich zuerst durch Herrn HINGEWIESEN.

dem gestattet sie eine Beschreibung der statistischen, in (14) eingeführten Beschleunigung $A(t)$. Führt man nach dem Schema der Gln. (1) bis (3) sowohl für $v(t)$ wie auch für $A(t)$ die FOURIERentwicklung ein, so erhält man als Zusammenhang zwischen den spektralen Verteilungen von A und v

$$v_{\omega}^2 = \frac{A_{\omega}^2}{\beta^2 + \omega^2}.$$

Aus dem Wert (16) für v_{ω}^2 folgt also

$$A_{\omega}^2 = \frac{2 k T \beta}{\pi m}, \quad (17)$$

unabhängig von ω . Wir haben wieder ein weißes Spektrum und damit eine Korrelation der Reichweite Null. Damit folgt nach (9) sogleich für den während der Zeit ϑ übertragenen Impuls der bekannte Wert

$$m^2 \left(\int_t^{t + \vartheta} A(t) dt \right)^2 = 2 k T m \beta \equiv \frac{2 k T}{B}.$$

An (17) knüpft sich folgende Bemerkung: Solange die in der Bewegungsgleichung auftretende Reibung β eine richtige, d. h. von der Frequenz unabhängige Konstante ist, hat die Korrelation der seitens der Umgebung ausgeübten statistischen Kraft den Charakter einer δ -Funktion. Das bedeutet aber, daß die Funktion $A(t)$ aus lauter Stößen von unendlich kurzer Zeitdauer bestehen muß. Physikalisch gesehen dauert aber jeder Stoß eine endliche, wenn auch sehr kurze Zeit, etwa τ' . Die Korrelation wird dann über eine Zeit von der Größenordnung τ' ausgebreitet sein. Gleichzeitig muß eine Frequenzabhängigkeit von β auftreten, sobald ω in die Größenordnung $1/\tau'$ kommt.

d) Das Widerstandsrauschen. Befindet sich innerhalb eines Stromkreises ein OHMScher Widerstand R , bei der Temperatur T , so gibt er nach NYQUIST [3] zu einer rein thermisch bedingten Spannung V Veranlassung, deren spektrale Verteilung durch die nachstehende Formel (23a) gegeben ist. Eine allgemeine Ableitung dieser Formel mit den Hilfsmitteln der Quantentheorie wurde neuerdings von CALLEN und WELTON [2] gegeben. Im folgenden soll dieselbe Formel an einem speziellen, klassischen Modell für den Widerstand abgeleitet werden.

Die Enden des rein OHMSchen und auf der Temperatur T gehaltenen Widerstandes seien über irgendwelche athermische Schaltelemente (Kapazitäten, Induktivitäten) miteinander verbunden. Fließt in dem ganzen Kreis ein rein periodischer Strom $J = \tilde{J} e^{i \omega t}$, so ist durch die Impedanz $i Y(\omega)$ dieser Elemente die an den Enden von R liegende Spannung \tilde{U} durch

$$\tilde{U} = i Y(\omega) \tilde{J}$$

gegeben. Ist allgemeiner $J(t)$ als FOURIER-Integral

$$J(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{j}(\omega) e^{i \omega t} d\omega$$

gegeben, so wird

$$U(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int i Y(\omega) \tilde{j}(\omega) e^{i \omega t} d\omega.$$

Besteht Y speziell aus einer Induktivität L in Serie mit einer Kapazität C , so ist

$$Y(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega C}. \quad (19)$$

In unserem Widerstand fließt alsdann im Mittel der Strom U/R . Infolge der thermischen Bewegung der

Ladungsträger überlagert sich über diesen mittleren Strom ein *unregelmäßiger (statistischer) Strom* J' , so daß wir im ganzen die Stromstärke

$$J = \frac{U}{R} + J' \quad (20)$$

erwarten. Wir wollen mit Hilfe eines einfachen, klassischen Modells die spektrale Verteilung von J' ermitteln. Als Modell wählen wir ein Kontinuum, welches je cm^3 n frei bewegliche Teilchen der Masse m und der Ladung e enthält. Wegen der Elektroneutralität besitzt das Kontinuum die Ladungsdichte $-ne$. Außerdem soll es auf ein bewegtes Teilchen die bremsende Kraft $-m\beta v$ ausüben. Dieses Modell entspricht etwa einem Elektrolyten. Wir ermitteln zunächst den Widerstand R dieses Modells. Unter der Wirkung einer Feldstärke E (in x -Richtung) erhält ein solches Teilchen die Geschwindigkeit $\bar{v} = \frac{e}{m\beta} E$; damit haben wir die Stromdichte $j = ne\bar{v} = \frac{ne^2}{m\beta} E$. Der spezifische Widerstand ist also $\frac{m\beta}{ne^2}$. Der Widerstand R unseres Leiters vom Querschnitt q und der Länge l ist also

$$R = \frac{l m \beta}{q n e^2} \quad (21)$$

Nun kommt der entscheidende Ansatz für den Strom J . Unser Widerstand enthält im ganzen $N = nql$ Teilchen. Beträgt v_j die Geschwindigkeit des Teilchens Nr. j , so setzen wir für den Momentanwert des Stromes

$$J = \frac{e}{l} \sum_{j=1}^N v_j \quad (22)$$

Dabei nehmen wir an, daß J entlang des Drahtes konstant ist und daß die Teilchen praktisch gleichmäßig über den Draht verteilt sind. Eine merkliche Abweichung von dieser Situation soll durch die damit verknüpften Raumladungen verhindert sein. Als dann genügt zur Rechtfertigung von (22) die Bemerkung, daß danach für den Mittelwert von J gilt $\bar{J} = \frac{eN}{l} \bar{v} = enq\bar{v}$, wie es sein muß. Indem wir diesen Mittelwert abspalten, schreiben wir

$$J = \frac{Ne}{l} \bar{v} + \frac{e}{l} \sum_{j=1}^N (v_j - \bar{v})$$

Der erste Summand ist nur bei einer äußeren Spannung U von Null verschieden und hat dann den Wert U/R . Damit haben wir nach (20)

$$J' = \frac{e}{l} \sum_{j=1}^N (v_j - \bar{v})$$

Die Größen $v_j - \bar{v}$ haben eine isotrope MAXWELL-Verteilung. Wir können daher \bar{v} fortlassen und uns auf das statistische Verhalten von

$$J' = \frac{e}{l} \sum_{j=1}^N v_j$$

mit $\bar{v}_j = 0$ beschränken. Beim Quadrieren gilt wegen der isotropen Verteilung $\sum_{j \neq k} v_j v_k = 0$, also $J'^2 =$

$$\frac{e^2}{l^2} \sum_1^N v_j^2$$

Nun können wir auf beiden Seiten zum zeitlichen Mittel und zur Spektralverteilung übergehen. Da erhalten wir für jedes der v den oben in (16) angegebenen Wert. Im ganzen wird also

$$J_\omega'^2 = \frac{e^2}{l^2} N \cdot \frac{2kT}{\pi m \beta} \frac{1}{1 + \omega^2/\beta^2}$$

Nun ist nach (21) $\frac{e^2 N}{l^2 m \beta} = \frac{e^2 n q}{l m \beta} = \frac{1}{R}$. Damit haben wir die spektrale Zerlegung von J'

$$J_\omega'^2 = \frac{2}{\pi} \frac{kT}{R} \frac{1}{1 + \omega^2/\beta^2}$$

Solange ω klein ist gegen die reziproke Bremszeit haben wir vollständige Übereinstimmung mit der NYQUIST-Formel

$$J_\omega'^2 = \frac{2}{\pi} \frac{kT}{R} \quad (23)$$

Wenn dagegen ω von der Größenordnung β wird, darf bei unserem Modell diese Gleichung gar nicht herauskommen, weil es dann keinen rein OHMSchen Widerstand mehr besitzt, was bei der allgemeinen Ableitung von NYQUIST vorausgesetzt wurde. Denn aus der Bewegungsgleichung $\dot{v} + \beta v = \frac{e}{m} E$ folgt im periodischen Fall ($\approx e^{i\omega t}$) als Zusammenhang zwischen \dot{v} und der Stromdichte j

$$E = \frac{m}{ne^2} (\beta + i\omega) j$$

An Stelle des OHMSchen Widerstandes hat unser Modell eine Impedanz

$$R + iR \frac{\omega}{\beta}$$

Es verhält sich also so, als ob es neben dem Widerstand R eine Induktivität $L = R/\beta$ hätte.

In den Anwendungen ist es üblich, an Stelle der durch die thermische Agitation bedingten Stromes die *thermische Spannung*

$$V = RJ' \quad \text{mit} \quad V_\omega^2 = \frac{2}{\pi} kT R \quad (23)$$

einzuführen. Man erhält den in der ganzen Anordnung fließenden Strom durch Elimination von U aus den Gln. (18) und aus der mit (20) identischen Gleichung

$$RJ = U + V,$$

indem man zunächst auch für V das FOURIERintegral hinschreibt

$$V(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} c(\omega) e^{i\omega t} d\omega; \quad V_\omega^2 = \frac{2}{l_0} |c(\omega)|^2$$

Damit liefert die letzte Gleichung:

$$Rj(\omega) = iY(\omega)j(\omega) + c(\omega)$$

Mit der Impedanz $Z = R - iY(\omega)$ des ganzen Kreises folgt daraus nach dem Schema der Gl. (1)–(3)

$$J_\omega'^2 d\omega = \frac{2}{\pi} kT \frac{R}{|Z|^2} d\omega, \quad (24)$$

also für das quadratische Mittel

$$\bar{J}^2 = \frac{2kT}{\pi} \int_0^\infty \frac{R}{|Z|^2} d\omega \quad (25)$$

Mit dem speziellen Wert (19) für Y wird Z

$$|Z|^2 = R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2$$

Integration nach ω in (25) läßt sich elementar ausführen und ergibt

$$\overline{J^2} = \frac{k T}{L} \quad \text{und} \quad \overline{Q^2} = k T C.$$

Es sein muß, wird die mittlere Energie sowohl der Aktivität wie auch der Kapazität gleich $\frac{1}{2} k T$:

$$\frac{1}{2} L \overline{J^2} = \frac{1}{2 C} \overline{Q^2} = \frac{1}{2} k T.$$

Da auch dieses Resultat nichts weniger als überaus einfach ist, so schien es mir doch interessant, im einen Mechanismus aufzuzeigen, durch welchen die Energie der BROWNSchen Bewegung der Ladungen im Widerstand diese Energie vom Wärmebad des Kondensator und die Induktivität übertragen

Zusammenfassung.

Im mathematischen Teil wird die gegenseitige Beziehung zwischen drei wichtigen Größen entwickelt, nämlich der Spektralzerlegung, der Korrelation und dem Quadrat des über eine feste Zeitdauer genommenen Mittelwertes. Diese Beziehungen ermöglichen eine besonders einfache Behandlung des Schroteffektes, der BROWNSchen Bewegung und deren Anwendung auf das Widerstandsrauschen.

Literatur. [1] WANG, M. C. u. G. E. UHLENBECK: *Rev. mod. Phys.* **17**, 323 (1945). — [2] CALLEN, H. B. u. T. A. WELTON: *Phys. Rev.* **83**, 34 (1951). — [3] NYQUIST, H.: *Phys. Rev.* **32**, 110 (1928).

Prof. Dr. RICHARD BECKER,
Institut für theoretische Physik der Universität
Göttingen.

Über die Natur der Wellen*.

Von FRITZ BOPP, München.

(Eingegangen am 14. Januar 1955.)

In den folgenden wird die Wellenvorstellung, wie sie mit der Entwicklung der Elektrodynamik herausgefunden hat, kritisch untersucht. Das scheint notwendig, weil mit ihr Hypothesen verbunden sind, die den Weg zur Quantenmechanik erschweren. Diese Bedeutung überrascht zunächst, weil eine der bedeutendsten neueren Leistungen in der Elektrodynamik die Abschüttelung der Ätherhypothese ist, die von dem besetzt war, Hypothesen überhaupt zu vermeiden.

Das ist aber nicht vollständig gelungen. An die Stelle des Äthers ist das Feld getreten, z. B. das elektromagnetische. Das Feld stellt einen Zustand dar, der sich überall dort, wo geladene Teilchen sind, in charakteristischen Kraftwirkungen äußert. Die Hypothesen-Enthaltsamkeit zeigt sich darin, daß man keine Aussagen darüber macht, wie der Raum zu Kraftwirkungen befähigt wird.

Die Grenzen dieser Enthaltsamkeit werden offen, wenn man die Erhaltungssätze betrachtet. Sie betreffen die Verteilung und Strömung von Energie und Impuls im Raum. Soweit stimmen die Verhältnisse überein, wenn in einem elastischen Körper völlig überein, während aber im elastischen Körper das System der materiellen Partikel Träger von Energie und Impuls sagt man in der Elektrodynamik, daß das Feld diese Funktion übernimmt [1]. Damit erhält das Feld Substanzeigenschaften. Das mag zu Recht gehen oder nicht. Hier kommt es zunächst auf die Fragestellung an, daß dies eine Hypothese ist, deren Gültigkeit geprüft werden muß.

Nach allem, was wir wissen, führt diese Hypothese zur Makroelektrodynamik nicht zu Schwierigkeiten. Sie kann jedoch in der Quantenmechanik anders sein. In der Unverträglichkeit der Korpuskel- und Wellenvorstellung leitet sich gerade aus der substantiellen Auffassung der Wellenfelder ab. Wellen- und Teilcheneigenschaften, so pflegt man zu sagen, schließen sich gegenseitig aus, weil die Energie nicht zur gleichen Zeit wie die einer substantiell aufgefaßten Welle im Raum ausgebreitet sein kann und wie die eines Teil-

chens lokalisiert [2]. Solche Schwierigkeiten gibt es im elastischen Körper nicht. Dort ist die Existenz der Wellen an die der Teilchen gebunden. Ohne daß wir damit zur Äthertheorie zurückkehren möchten, können wir aus dem Beispiellernen, daß die Schwierigkeiten, sich Quantenvorgänge vorzustellen, eng mit der Substanzvorstellung der Wellenfelder verknüpft sein können.

Bevor wir in der Diskussion fortschreiten, ist es notwendig, die Wellenvorstellung zu umreißen und den Begriff der Wellen zu definieren: Die Existenz von Wellen setzt die von räumlich verteilten Oszillatoren voraus, die derart miteinander verkoppelt sind, daß die Schwingungen eines jeden über die Nachbarn hinweg auf alle übergreifen.

Was schwingt, ist für die Existenz von Wellen gleichgültig. Es bestimmt ihre Natur. Bei elastischen Wellen in einem Kristall sind die Oszillatoren an Gleichgewichtslagen gebundene materielle Partikel¹. Bei elektromagnetischen Wellen (in klassischer Auffassung) haben wir an jeder Stelle des Raumes Oszillationen der Feldstärken, die an den Kraftwirkungen auf Partikel sichtbar werden.

Die Oszillatoren können kontinuierlich verteilt sein, wie im Fall des klassischen elektromagnetischen Feldes, oder diskret wie bei elastischen Wellen in einem Kristall. Denn das Kriterium für die Existenz von Wellen sind Interferenzerscheinungen, die man bei der Ausbreitung des Schalles [3] genau so wie bei der des Lichtes beobachtet. Ob wir von Wellen oder von Koppschwingungen reden, hängt lediglich davon ab, ob unsere Aufmerksamkeit mehr auf das Zusammenspiel der Schwingungen oder auf das Verhalten der einzelnen Oszillatoren gerichtet ist. Von Wellen pflegen wir nur zu reden, wenn die Zahl der Oszillatoren hinreichend groß ist und wenn auf eine Wellenlänge bereits viele Oszillatoren kommen. Beim sympathischen Pendel ist das offensichtlich noch nicht der Fall, bei einem Tesla-Transformator durchaus.

Während die Natur der Oszillatoren und ihre Zahl variieren kann, ohne daß dadurch die Existenz von

* Herrn Prof. Dr. G. Joos zum sechzigsten Geburtstag in dankbarer Verbundenheit zugeeignet.

¹ Wir sprechen hier ausdrücklich von den Oszillatoreigenschaften der einzelnen Teilchen und nicht von den Normalschwingungen.

Wellen berührt wird, ist die Annahme, daß es Oszillatoren gibt, unabdingbar. Denn neben Wellenvorgängen haben wir Ausgleichungsvorgänge, z. B. Diffusionserscheinungen. Sie stimmen mit jenen zwar darin überein, daß sich Störungen infolge von Kopplungen im Raume ausbreiten, aber sie unterscheiden sich von ihnen in der Ersetzung der Oszillationen durch abklingende Vorgänge.

Kehren wir zur Quantentheorie zurück, speziell zur SCHRÖDINGER-Gleichung [4] für ein Elektron, um ein konkretes Beispiel vor Augen zu haben, so bestimmt die Wellenfunktion nach der statistischen Deutung von BORN [5] die Wahrscheinlichkeiten, mit denen wir das Elektron in allen möglichen Volumelementen erwarten dürfen. Gewöhnlich verbindet man diese statistische Deutung mit der Substanzauffassung der Wellen, die man aus der Elektrodynamik auf die Schrödingerwellen überträgt, und kommt so zu den oben erwähnten Schwierigkeiten, denen man sich nur noch dadurch entziehen kann, daß man zu erkenntnistheoretischen Verzicht bereit ist.

Nach der obigen Fassung des Wellenbegriffs besteht aber keine Notwendigkeit, an der Substanzvorstellung festzuhalten. In einer statistischen Theorie, die von einer gedachten Gesamtheit unabhängiger Einzelteilchen handelt, haben wir in jedem Volumelement eine bestimmte Wahrscheinlichkeit, mit der wir das Teilchen in ihm erwarten. Sie variiert zwischen 0 und 1. Außerdem sind die Wahrscheinlichkeiten in verschiedenen Volumelementen dadurch verkoppelt, daß die Summen über alle gleich 1 sein muß. Wie gleich noch näher erläutert wird, kommt hinzu, daß die Wahrscheinlichkeiten in den einzelnen Volumelementen oszillieren können. Damit sind alle Voraussetzungen für die Existenz von Wellen erfüllt, von Wahrscheinlichkeitswellen, wie wir sagen.

Das Wort ist geläufig, wird hier aber in einem strengeren Sinne als gewöhnlich gebraucht, nachdem wir die Substanzvorstellung aufgegeben haben. Die Wellen beschreiben nichts anderes mehr als Wahrscheinlichkeiten. In vieler Hinsicht gleichen die SCHRÖDINGER-Wellen hiernach eher den elastischen als den elektromagnetischen Wellen. Insbesondere widersprechen Wahrscheinlichkeitswellen genau so wenig wie elastische Wellen der Partikelvorstellung. Sie setzen diese ebenfalls voraus. Beide beschreiben die Bewegung der Teilchen. Sie unterscheiden sich voneinander nur darin, daß die elastischen Wellen die Bewegung einer realen Gesamtheit streng, die Wahrscheinlichkeitswellen die einer gedachten Gesamtheit von Einzelteilchen statistisch beschreiben.

Neben der Preisgabe der Substanzvorstellung ist die Voraussetzung, daß die Wahrscheinlichkeiten oszillieren können, von entscheidender Bedeutung. Den Beweis, daß dies möglich ist, wollen wir hier nicht *in extenso* bringen, da wir ihn kürzlich an anderer Stelle ausführlich dargestellt haben [6]. Doch sei auf die entscheidenden Punkte hingewiesen. Zunächst ist es leicht zu sehen, warum man nicht von vorneherein auf den bisher fast trivial erscheinenden Ausweg verfallen ist. Neben den Hemmungen, die zwar nicht begründete, aber tief verankerte Substanzvorstellung preiszugeben, hat sicher die Erfahrung eine Rolle gespielt, daß statistische Kopplungen gewöhnlich zu Ausgleichungsvorgängen führen, wie die Gleichungen für Wärmeleitung und Diffusion zeigen. Damit Wahr-

scheinlichkeiten oszillieren können, müssen besondere Voraussetzungen erfüllt sein¹, die eng mit HEISENBERGSchen Unschärferelation zusammenhängen.

PLANCK [7] hat darauf hingewiesen, daß die Gültigkeit klassischer Gesetze an die Voraussetzung individueller Reproduzierbarkeit gebunden ist. Dies bedeutet, angewandt auf Massenpunkte, daß Versuchsanordnungen existieren, die eine Gesamtheit von Teilchen in Bewegung setzen, derart daß jedes die gleiche Bahnkurve in derselben Weise durchläuft. Eine solche Gesamtheit nennen wir im Gegensatz zu einer statistischen „geordnet“. Die klassische Physik setzt also nach PLANCK die Existenz geordneter Gesamtheiten voraus.

In der klassischen statistischen Mechanik haben wir statistische Gesamtheiten vor uns. Sie unterscheiden sich von den geordneten darin, daß nur die Gültigkeit des Gesetzes der großen Zahlen gefordert werden muß. Die Bahn der Teilchen braucht nicht mehr individuell reproduziert zu werden. Doch muß die Reproduzierbarkeit des Verhaltens der Gesamtheit gewährleistet sein.

Von der Quantenmechanik unterscheidet sich die klassische statistische Mechanik darin, daß in jedem Augenblick beliebige Gesamtheiten existieren können speziell auch geordnete. Man kann zeigen, daß unter dieser Voraussetzung nur zwei Arten von statistischen Bewegungsgleichungen vorkommen. Beide schließen die Quantenmechanik aus. Die statistischen Bewegungsgleichungen sind entweder vom Typ der LIUVILLESchen Gleichung oder vom Typ einer Diffusionsgleichung². Im ersten Fall bleiben geordnete Gesamtheiten geordnet und die Bewegungsgleichungen sind umkehrbar, d. h. auch die umgekehrte Bewegung stellt eine Lösung der statistischen Bewegungsgleichungen dar, natürlich eine mit anderen Anfangsbedingungen. Im anderen Fall ist Nichtumkehrbarkeit charakteristisch. Geordnete Gesamtheiten gehen in weniger geordnete über.

Eine dritte Möglichkeit gibt es nicht, solange wir annehmen, daß beliebige Gesamtheiten herstellbar seien. In der Quantenmechanik ist aber die Umkehrbarkeit der statistischen Bewegungsgleichungen mit Diffusionserscheinungen verbunden. Dieser Fall kann nach dem vorhin genannten Satz nur eintreten, wenn nicht alle Gesamtheiten realisierbar sind. Insbesondere zeigt sich, daß die geordneten Gesamtheiten auszu schließen sind. Damit trifft für atomare Teilchen die PLANCKsche Voraussetzung der individuellen Reproduzierbarkeit nicht zu. Wir können darum keine klassischen Gesetze mehr erwarten. Die genauere Untersuchung zeigt, daß hier die HEISENBERGSche Unschärferelation ihren Platz hat. Nur sprechen wir diese nicht mehr in der an die Substanzvorstellung gebundenen Form aus, daß ein Teilchen nicht zugleich einen bestimmten Ort und einen bestimmten Impuls haben, sondern wir sagen, daß keine Gesamtheit hergestellt werden kann, in der alle Teilchen den gleichen Ort und den gleichen Impuls haben. Die quantitative Formulierung lautet entsprechend.

¹ In manchen Arbeiten, die die Quantenstatistik nach Art der statistischen Mechanik aufzufassen suchen, wird dieser Punkt nicht beachtet.

² An diesem Satz muß der Versuch scheitern, die Quantenstatistik als klassisch statistische Mechanik zu betrachten.

an könnte meinen, daß damit die Wellenvor-
 gang völlig wesenlos wird. Das trifft aber sicher
 zu. Denn ihrem Ursprung nach sind die Wellen,
 auf eine Substanz bezogen, sondern auf eine Ge-
 Wir brauchen nur daran zu erinnern, daß Wellen,
 ber eine weite Wasserfläche streichen, aus lokalen
 gungen des Wassers hervorgehen. Darum sind
 inesweg unwirklich. Nur sind sie, obwohl mit der
 ie verbunden, nicht materiell. Sie sind ein Aus-
 der Gesetzmäßigkeit der Bewegung zunächst im
 sehen Körper oder in Wasser und nun auch in
 er Weise im atomaren Bereich.

in zweiter Einwand drängt sich auf, der uns dem
 unserer Untersuchung näher bringen wird. Die
 icklung der Quantentheorie zeigt deutlich die
 enz, den Wesensunterschied zwischen Licht und
 keln (hie Wellen, hie Teilchen) aufzuheben. Hier
 n wir ihn scheinbar unterstrichen. Genauer müß-
 vir allerdings sagen, daß wir nur von den elektro-
 metischen Wellen in klassischer Auffassung ab-
 ekt sind. Das schließt nicht aus, daß eine engere
 ehung zwischen den SCHRÖDINGER-Wellen und
 Lichtwellen besteht, wenn wir zur Quantentheorie
 Wellenfelder übergehen.

Wir gewinnen sie in üblicher Weise [8]. Neu ist
 lich, daß wir von Teilchen reden dürfen, ohne ein
 chtes Gewissen haben zu müssen. Das kommt der
 aulichkeit zugute. Bereits die gewöhnliche
 RÖDINGER-Gleichung für ein Teilchen können wir
 dem Vorgehen von JORDAN und WIGNER [9] in
 neuen Art formulieren. Die Änderung bezieht sich
 uf, wie wir die Bewegung beschreiben.

in der klassischen Mechanik nimmt man an, daß
 Teilchen bei der Bewegung ihre Lage im Raum
 rn, ohne dabei ihre Identität zu verlieren [10].
 Falle individueller Reproduzierbarkeit der Bewe-
 ist diese Auffassung selbstverständlich. Da aber
 solche Reproduzierbarkeit in der Quantenmecha-
 icht existiert, brauchen wir uns nicht zu wundern,
 uns in ihr noch eine andere Auffassung der Bewe-
 begegnet.

Die Bewegung kann dadurch zustande kommen,
 ein Teilchen in jedem Augenblick aufhört zu
 ieren und daß zur Kompensation in seiner Nach-
 echaft ein anderes entsteht. Nach JORDAN und
 NER [9] läßt sich die SCHRÖDINGER-Gleichung so
 ulieren, daß sie dieser Auffassung entspricht. Es
 n also beide Möglichkeiten nebeneinander auf. Die
 te ist zunächst nur formal ausgezeichnet, nämlich
 urch daß ein- und dieselbe Gleichung nicht nur
 örperprobleme beschreibt, von denen wir her-
 men, sondern auch Mehrkörperprobleme er-

Erst wenn man berücksichtigt, daß es echte Er-
 ungsprozesse gibt, bei denen neue Teilchen erschei-
 und auch die umgekehrten Vorgänge vorkommen,
 denen Teilchen verschwinden, zeigt sich, daß die
 te Auffassung, nach der von einer Bewegung unter
 ahrung der materiellen Identität nicht mehr die
 e sein kann, der Wahrheit näher kommt. Fast
 hte man sagen: In der Quantentheorie der Wellen-
 er tritt an die Stelle des Demokritischen Atomismus
 em die Konstanz des Seienden durch die Selbst-
 tität der materiellen Partikel gewährleistet wird,
 Atomismus HERAKLITScher Prägung, bei der diese
 stanz, um mit H. WEYL [11] zu sprechen, durch

„Einstellung“ zustandekommt, also durch das Gesetz,
 welches die Vorgänge beherrscht. Nicht die Materie
 erscheint hier als das Primäre, sondern die gestaltende
 Ordnung.

Wir wollen versuchen, die SCHRÖDINGER-Gleichung
 in ihrer neuen Gestalt zu beschreiben. Wenn man die
 Selbstidentität der Partikel preisgibt, ist es nicht mehr
 möglich, ein bestimmtes Teilchen ins Auge zu fassen,
 um seine Bahnkurve festzustellen. Wir müssen viel-
 mehr bestimmte Volumenelemente betrachten und an-
 geben, ob darin Teilchen zu finden sind oder nicht. Der
 Grundvorgang ist also, daß in einem Volumen ein Teil-
 chen erscheint oder verschwindet.

Da wir von der SCHRÖDINGER-Gleichung herkom-
 men ist nur eine quantenstatistische Beschreibung
 möglich, d. h. eine, in der die Diffusion mit der Um-
 kehrbarkeit verbunden ist. Fassen wir gleich das
 Mehrkörperproblem ins Auge, so müssen wir die Wahr-
 scheinlichkeiten angeben, mit denen in jedem Volumenelement
 verschiedene Anzahlen von Teilchen vor-
 kommen: Kein Teilchen, ein Teilchen, zwei Teilchen
 usw. Das führt zu einer SCHRÖDINGER-Funktion, die
 von den Besetzungszahlen aller Volumenelemente ab-
 hängt, von der „Konfiguration“, wie man sagt. Uns
 interessiert hier nicht, wie die Gleichungen dafür im
 einzelnen aussehen. Wichtig ist jedoch, daß wir erken-
 nen: Alle Vorgänge lassen sich als lokale Erzeugungs-
 und Vernichtungsprozesse beschreiben. Das Hinaus-
 greifen in den Raum ergibt sich daraus, daß die Pro-
 zesse in verschiedenen Zellen miteinander verkoppelt
 sind. Im Falle der ursprünglichen SCHRÖDINGER-
 Gleichung ist mit jedem Vernichtungsprozeß in einem
 Punkt ein Erzeugungsprozeß in einem anderen Punkt
 verbunden, und zwar so, daß die Gesamtteilchenzahl
 konstant ist. Ohne daß wir unsere Vorstellung auf-
 geben müßten, liefert eine geringfügige Änderung der
 Kopplung zwischen Vernichtungs- und Erzeugungs-
 prozessen die Möglichkeit, Emission und Absorption,
 wie sie uns in elementarer Weise bei Lichtquanten be-
 gegnen, in die Betrachtung einzubeziehen.

Hier kehren wir zu unserer Frage nach der Natur
 der Wellen zurück, weil wir nun auch das elektroma-
 gnetische Feld behandeln können. Zunächst läßt sie
 sich in gleicher Weise beantworten wie im Falle der
 einfachen SCHRÖDINGER-Gleichung. Für die Wahr-
 scheinlichkeitsamplituden im Konfigurationsraum gel-
 ten wie für die elementaren SCHRÖDINGER-Funktionen
 Oszillatorgleichungen. Wir haben also nach wie vor
 Wahrscheinlichkeitswellen, die sich aber nicht im
 Ortsraum, sondern im Konfigurationsraum abspielen.
 Das gilt ganz allgemein für die Quantentheorie der
 Wellenfelder. Nur im Falle des Einkörperproblems
 läßt sich der Konfigurationsraum auf den Ortsraum
 abbilden. Im Falle konstanter Teilchenzahl kann an
 die Stelle des Raumes der Besetzungszahlen der Lagen-
 raum treten, in dem ein Punkt die Orte sämtlicher Teil-
 chen bezeichnet.

Neben dieser Betrachtungsweise gilt es noch eine
 zweite, die näher an die klassische Wellenauffassung
 heranführt. Das erkennen wir, wenn wir noch einmal
 auf die Vorgänge in einer einzigen Raumzelle blicken.
 Darin treffen wir in jedem Augenblick eine bestimmte
 Teilchenzahl an, und wir beobachten die Wahrschein-
 lichkeiten, mit denen die verschiedenen Anzahlen vor-
 kommen. Der Zustand einer Raumzelle wird also,
 wenn wir nur eine Teilchensorte und BOSE-Natur vor-

aussetzen¹, durch eine nichtnegative ganze Zahl beschrieben. Ein physikalischer Vorgang besteht in der Änderung von mindestenseiner solchen Besetzungszahl.

Ein derartiges System kann man als quantenmechanischen Oszillator betrachten, dessen Quantenzahlen (evtl. nach Abzug der Nullpunktsenergie) die Teilchenzahlen liefern, so daß die Übergänge zwischen den verschiedenen Quantenzuständen die Teilchen-erzeugung und -vernichtung beschreiben. Da diese Prozesse in einer Zelle solche in Nachbarzellen auslösen, sind die verschiedenen Oszillatoren miteinander verkoppelt. Darum sind auch hier die Voraussetzungen erfüllt, die die Existenz von Wellen sicherstellen. Diesmal handelt es sich um Wellen im Raum. Die Wellengleichungen stimmen formal mit denen der klassischen Feldphysik überein, z. B. mit den MAXWELLSchen Gleichungen. Sie unterscheiden sich nur darin, daß die Wellenfunktionen Operatoren sind, weil wir keine Oszillatoren im klassischen Sinne haben, sondern Teilchenumwandlungen. Mathematisch formal ergeben sich also Operator-Wellengleichungen, und dem physikalischen Inhalt nach liegen Wirkungswellen vor.

Damit ist unsere Themafrage nach der Natur der Wellen in einem Feld beantwortet. Sie lautet: Das Wellenfeld wird ausgekoppelten Oszillatoren aufgebaut, von denen jeder die Teilchenvernichtungen und -erzeugungen in einer Raumzelle beschreibt. Träger des Wellenfeldes ist also der Raum mit der Eigenschaft, daß in jedem Punkt Teilchen erscheinen und verschwinden können. Daß hier eine Aussage über die Natur der das Wellenfeld aufbauenden Oszillatoren möglich ist, hebt meines Erachtens die Erkenntnis in der Quantentheorie der Felder über den Stand hinaus, der in der Makroelektrodynamik erreichbar ist, was nicht davon berührt wird, daß noch eine gute relativistische Formulierung der Theorie aussteht².

Auch hier haben die Wellen offensichtlich keine substantielle Bedeutung. Allein die Teilchen sind Träger der Energie, die im makrophysikalischen elektromagnetischen Feld nur darum wie stetig im Raum verteilt erscheint, weil die Zahl der Quanten außerordentlich groß ist. In 100 km Abstand von einem 100 kW-Sender mit 100 m Wellenlänge haben wir schätzungsweise 10^{12} bis 10^{14} , im direkten Sonnenlicht etwa $3,5 \cdot 10^7$ Quanten/cm³. Bei so großer Teilchenzahl gibt es neben der Beobachtung von Einteilchen-Ereignissen noch die von kumulativen Wirkungen der Teilchen, wie sie sich z. B. in der Ablenkung eines makrophysikalischen elektrisch geladenen Körpers in einem elektrischen Feld zeigen. In solchen Fällen begegnen wir den Welleneigenschaften unmittelbar, was noch dadurch unterstrichen wird, daß die Approximation durch klassische Wellengleichungen bereits sehr gut ist.

Wir haben hier versucht, die Quantentheorie aus einer alle ihre Teile umfassenden Vorstellung zu entwickeln und zu zeigen, wie anschaulich die Vorgänge im

Lichte einer solchen Vorstellung sind. Bezüglich der Beweise haben wir, um nicht zu weitläufig zu werden, auf eine Arbeit mehr mathematischen Charakters verwiesen.

Solange man nur eine mathematische Vervollkommenung der Theorie anstrebt, im übrigen aber den klassischen Vorstellungen festhält, erweisen sich Wellen- und Teilchenbild als Grenzzideen, die beide die Wirklichkeit angenähert beschreiben, und zwar in der Weise, daß die eine eine gute Näherung liefert, wo die andere versagt, so daß die zwischen ihnen gespannte Wirklichkeit in jedem Fall nicht nur am besten berechnet, sondern auch einigermaßen treffend beschrieben werden kann.

Hier sind uns Teilchen- und Welleneigenschaften nicht als Grenzzideen, sondern als Bestandteile einer umfassenden Vorstellung begegnet, in der sie sich gegenseitig bedingen, so daß die einen nicht ohne die anderen gedacht werden können.

Schon in der klassischen Mechanik ist es nicht wie es oft dargestellt wird, daß wir als einzige Realität nur die Materie hätten. Denn neben ihr haben wir ihre Bewegung bestimmenden Gesetze, also die Natur beherrschende Ordnung. Materie und Bewegungsgesetze, beide sind in gleicher Weise real. Das wird nur deshalb nicht ausgesprochen, weil man glaubt, von der Ordnung abstrahieren zu können, ohne daß durch die Existenz der Materie in Frage gestellt wird. Es ist hier nicht der Ort zu prüfen, ob das wenigstens im klassischen Bereich richtig ist.

In der Quantentheorie gibt es keine solchen Zweifel. In ihr sind nach den oben entwickelten Vorstellungen die Teilchen als Repräsentanten der Materie und die Wellen als Ausdruck des Bewegungsgesetzes nicht mehr einzeln wegzudenken. Sie bilden eine unlösliche Einheit. Denn ohne die Teilchen gäbe es keine Bewegungen und Umwandlungen und damit auch keine Wellen. Ohne Wellen aber könnten wir nicht von der Existenz der Teilchen sprechen, weil diese in einer Theorie, in der sie ihre Selbstidentität nicht wahren, ihre Dauer allein der Gesetzmäßigkeit verdanken. So verschmelzen Wellen und Teilchen, nachdem beide etwas von ihrem historischen Glanz eingebüßt haben, die Teilchen ihre ewige Dauer und die Wellen ihren substantiellen Charakter, in völliger Harmonie.

Literatur. [1] Vgl. irgend ein modernes Lehrbuch, z. B. BECKER, R.: Theorie der Elektrizität, Bd. I, 9. Aufl., Teubner 1932, III § 35, S. 80. — [2] Vgl. z. B. v. WEIZSÄCKER, C. F.: Zum Weltbild der Physik, 2. Aufl., Hirzel 1944, S. 86. — [3] Vgl. BERGMANN, L. u. Cl. SCHAEFER: Lb. d. Experimentelle Physik I, Berlin 1943, S. 412, Abb. 504. — [4] Vgl. SOMMERFELD, A.: Atombau und Spektrallinien, Bd. II, Vieweg 1934, S. 5. — [5] BORN, M.: Z. Phys. **37**, 863 (1926). — [6] BOPP, F.: Korpuskularstatistische Begründung der Quantenmechanik, Z. Naturf., im Druck; Wellen und Teilchen, Optik, im Druck. — [7] PLANCK, M.: Vorträge und Erinnerungen, Hirzel 1944, S. 285 ff., speziell S. 290. — [8] Vgl. z. B. WENTZEL, G.: Quantentheorie der Wellenfelder, Wien 1943. — [9] JORDAN, P. u. E. WIGNER: Z. Phys. **47**, 631 (1928). — [10] HAMEL, G.: Theoretische Mechanik, Springer 1949, S. 10, Abs. 4. — [11] WEIZSÄCKER, C. F.: Raum-Zeit-Materie, Springer 1923, S. 298. —

Prof. Dr. FRITZ BOPP,
Institut für theoretische Physik der Universität
München.

¹ Von mehreren Teilchenarten und von anderen als von Bosenteilchen brauchen wir nicht zu sprechen, weil sich für die hier zu entwickelnde Vorstellung nicht wesentlich Neues ergibt.

² Auf die Notwendigkeit der Vervollkommenung der Quantentheorie der Felder gehen wir hier nicht ein. Wir wollen nur zeigen, daß sich der gegenwärtige Stand der Theorie unserer Vorstellung unterordnet, und hoffen, daß von ihr aus ein neues Licht auf die vielbehandelten Schwierigkeiten fallen möge.

Neuere Entwicklungsarbeiten am BECKlichtbogen und an BECKbogenlampen*.

Von WOLFGANG FINKELNBURG, Erlangen.

Mit 1 Textabbildung.

(Eingegangen am 2. Januar 1954.)

Der BECKlichtbogen mit seinem infolge Dochtverpöpfung von Leuchtdampferfüllten positiven Krater net sich als Lichtquelle durch eine Kombination höchster Leuchtdichte, Lichtstärke und Lichtausbeute aus. Er wird deshalb in der überwiegenden Mehrzahl aller Lichtspieltheater der Welt als Projektionslichtquelle, ferner zur Studiobeleuchtung und für alle Scheinwerferzwecke eingesetzt, wo es auf eine Kombination von großem Lichtstrom und großer Leuchtdichte ankommt. Über den Stand der Forschung und Entwicklung am BECKlichtbogen und die Technik der verschiedenen BECKbogenlampen bei Kriegsende hat der Verfasser in einem Buch [1] berichtet. Über die in den Nachkriegsjahren, in USA unter Mitwirkung des Verfassers, geleistete Forschungs- und Entwicklungsarbeit über Beckbögen und Becklampen ist bisher nur in verschiedenen, teilweise schwer zugänglichen amerikanischen Zeitschriften berichtet worden. Es soll deshalb hier ein kurzer Überblick über die wichtigsten Ergebnisse gegeben werden.

Bei Kriegsende besaß der höchstentwickelte technisch angewandte BECKbogen eine maximale Kraterleuchtdichte von 160 000 HEFNER-Stilb (Hsb). Zur Erreichung dieser Leuchtdichte war ein relativ großer Bogen (Positivkohle 20×30 mm) sowie eine Stromstärke von 1200 Amp. erforderlich. Mit Kohlen kleineren Durchmessers und Stromstärken in der Größenordnung von 200 Amp. ließen sich Leuchtdichten über 100 000 Hsb praktisch nicht erreichen. Dieses lag zu einem wesentlichen Teil daran, daß der die Leuchtdichte bestimmende Gemisch von Cerfluorid und Ceroxyd (Ceroxyd) enthaltende positive Docht bei zu hoher Strombelastung nicht mehr gleichmäßig, sondern eruptiv oder gar explosiv zu verdampfen begann, und damit eine für praktische Zwecke brauchbare Lichttruhe bei Leuchtdichten über den genannten Werten nicht mehr erzielen konnte. Es schien, daß man schon zu nahe an die thermische Belastungsgrenze des Kunstkohlematerials herangekommen war.

Hier kann man nun, wie fast gleichzeitig im Laboratorium der National Carbon Comp. in Cleveland [2] vom Verfasser [3] gefunden worden ist, durch intensive Kühlung der Positivkohlen bis dicht an das Brennende Abhilfe schaffen. Umfaßt man nämlich das vordere Ende der Positivkohle bis etwa 8 mm den Kraterand heran mit zwei wassergekühlten Metallbacken, so erreicht man eine ganz wesentliche Verbesserung der Brenneigenschaften des BECKbogens. Er sinkt durch diese Kühlung bei vorgegebener Stromstärke die Brennspannung und mit ihr die Leuchtdichte des Bogens um bis zu 30%. Dafür vertritt aber die Positivkohle nunmehr eine ganz wesentlich höhere Strombelastung, und man erreicht daher bei befriedigender Lichttruhe leicht Leuchtdichten von 200 000 Internationalen Stilb, entsprechend 200 000 HEFNER-Stilb. Gleichzeitig sinkt der Abbrand der Positivkohle, auf gleiche Leuchtdichte bezogen, um

über 30%. Ein weiterer Vorteil ist eine merkliche Verminderung der Kratertiefe, womit die Möglichkeit einer besseren Ausleuchtung von Spiegeln großen Öffnungswinkels erreicht wird. Wir glauben, daß diese günstige Wirkung der Kühlung der Positivkohle zwei verschiedene Ursachen hat. Erstens verhindert man durch sie, daß die Positivkohle mehrere cm hinter dem Brennende sich auf heller Rotglut befindet und damit eine gewisse Strukturauflockerung stattfindet, die dann bei höherer Strombelastung im Bogen zu eruptiver Verdampfung und zu dem beobachteten Abschleudern kleiner fester Kohlepartikel führt. Die bis an ihr Brennende gut gekühlte Kohle behält ihre mechanische Festigkeit und Struktur bis sie „ins Feuer“ kommt, und sie verdampft dann auch bei höherer Strombelastung (z. B. 200 Amp. für eine 11 mm Positivkohle) noch so gleichmäßig, wie die gleiche ungekühlte Kohle bei einer um 20% niedrigeren Stromstärke und um 30% niedrigeren Leuchtdichte. Wir glauben, daß auch die technisch sehr erwünschte Abbrandverminderung auf dieser Verhinderung der mechanischen Zersetzung der Kohle, d. h. des Abschleuderns kleiner, fester Kohlepartikelchen beruht. Auch die verminderte Kratertiefe dürfte auf dem genannten Effekt beruhen.

Es ist nicht unwahrscheinlich, daß noch ein zweiter, und zwar ein physikalisch-chemischer Prozeß an der verbesserten Brennwiese des gekühlten BECKbogens beteiligt ist. Röntgenbeugungsuntersuchungen des Verfassers an zahlreichen BECKkohlen vor und nach dem Brennen in gekühlten wie ungekühlten Lampen deuten nämlich darauf hin, daß das Verhalten einer BECKkohle in Bögen hoher Leuchtdichte um so günstiger ist, je vollständiger das Leuchtsalz im Docht in der Form der früher kaum bekannten Verbindung Ceroxyfluorid $CeOF$ vorliegt. Untersuchungen von STEIN und dem Verfasser [4] über die Gitterstruktur und das Verhalten des $CeOF$ haben nun ergeben, daß dieses $CeOF$ beim Glühen der ein Gemisch von Ceroxyd und Cerfluorid enthaltenden Kohleleuchte während der Fabrikation entsteht, in Gegenwart von Luft aber schon beim Erhitzen auf einige hundert Grad C zu Ceroxyd (CeO_2) weiter oxydiert. Mit reinem Ceroxyd als Leuchtsubstanz aber läßt sich keine hohe Leuchtdichte mit befriedigender Lichttruhe erzielen. Wir halten es daher für wahrscheinlich, daß die Kühlung der Positivkohle bis an das Brennende heran das schädliche Weiteroxydieren des $CeOF$, bevor dieses in den Bogen gelangt, verhindert. Für die Annahme, daß die Kühlung der Positivkohle auf dem Umwege über die Bogenchemie wirksam den Bogenmechanismus selbst beeinflußt, spricht auch der Umstand, daß Messungen des Anodenfalls mit einer von SEGAL und dem Verfasser [5] erprobten Potentialsondenmethode eine Erniedrigung des Anodenfalles bei Kühlung der Positivkohle ergaben. Da somit die Kühlung der Positivkohle ihre günstige Wirkung erst zeigen kann, wenn auch der Kohleleucht docht wirksam gekühlt wird, zeigt die Kühlung um so bessere Erfolge, je höher die Wärmeleitfähigkeit des Kohlemantelmaterials ist.

Der technischen Anwendung des Beckbogens hoher Leuchtdichte stand bis vor wenigen Jahren die Notwendigkeit des häufigen Auswechselns der rasch abbrennenden Kohlen und die dadurch bewirkte Notwendigkeit der Unterbrechung des Betriebes nach jeweils 15–30 Minuten im Wege. Auch beim gut gekühlten Beckbogen haben wir bei einer mittleren Krater-Leuchtdichte von 150 000 bis 180 000 Internationalen Stilb immer noch einen Abbrand von etwa 100 cm pro Stunde, und wir haben physikalische Gründe anzunehmen, daß dieser Wert ohne Leuchtdichteeinbuße nicht wirksam gesenkt werden kann. Bei der Negativkohle könnte man durch Verwendung einer nicht zu dünnen und ebenfalls gut gekühlten

ständer untergebracht sind. Nach konischer Bearbeitung der Kohleenden wird nun im Betrieb eine Positivkohle nach der anderen hochgezogen, in das Ende der vorhergehenden hineingestoßen und dadurch so fest mit ihr verbunden, daß der Durchgang der Verbindungsstelle durch den Bogen ohne merkliche Störung der Lichtruhe erfolgt und damit ein kontinuierlicher Betrieb über viele Stunden möglich wird. Die technische Durchentwicklung der nach diesen Gesichtspunkten gebauten Experimentierlampe wurde von J. P. LATIL und Mitarbeitern in der Firma Genarco Inc. in New York durchgeführt. Eine genaue Beschreibung der in Abb. 1 dargestellten Lampe und ihrer Wirkungsweise ist an anderer Stelle [6] veröffentlicht worden. Dort finden sich auch alle Einzelheiten über die vom Bogen selbst gesteuerte Rotation der Negativ-Scheibe und die Kontrolle des Positivkohlen-Vorschubes durch Sonden.

Unabhängig von und gleichzeitig mit diesen Arbeiten hat auch GRETENER seine auf Seite 209 unseres Buches [1] beschriebene Lampenentwicklung weitergeführt. Bei seiner Lampe wird bekanntlich die Anodenflamme durch einen kräftigen Luftstrom unter Wirkung eines Magnetfeldes in die Bogensäule geblasen und dort weiter aufgeheizt. In den größeren Ausführungen dieser als Ventarc bzw. Super-Ventarc bezeichneten Lampe hat GRETENER schon vor uns Graphit-Scheiben bzw. -Ringe als negative Elektrode verwandt. In letzter Zeit ist er nach unseren vorhergehenden erfolgreichen Versuchen [7] mit dem Aneinandersetzen von Kohlen auch zu einem Positivkohlen-Magazin übergegangen [8] und hat damit eine in ihrer Brennzeit nicht begrenzte, den Berichten [9] nach durch besondere Stabilität sich auszeichnende Lampe geschaffen.

Zusammenfassung.

Durch intensive Kühlung der Positivkohle des Beckbogens dicht hinter ihrem Brennende wird die bei guter Lichtruhe erreichbare Leuchtdichte wesentlich gesteigert; Abbrand und Kratertiefe werden herabgesetzt.

Das Verhalten von Beckkohlen hoher Leuchtdichte scheint wesentlich von der Anwesenheit von CeOF im Docht bestimmt, das sich beim Backen der Kohlen aus CeF_3 und CeO_2 bildet.

Durch Verwendung einer Graphit-Kreisscheibe als Negativkohle und eines Mechanismus, durch den die einem Magazin entnommenen Positivkohlen nacheinander automatisch verbunden werden, konnten vollautomatische für viele Stunden unterbrechungslos bei einer Leuchtdichte von nahezu 200 000 sb brennende Beckbogenlampen entwickelt werden.

Literatur. [1] FINKELNBURG, W.: Hochstromkohlebogen. Springer-Verlag 1948. — [2] JONES, M. T. und F. T. BOWDITCH: J. Soc. Mot. Pict. Eng. 52, 395 (1949). — [3] FINKELNBURG, W.: ebenda 52, 407 (1949). — [4] FINKELNBURG, W. und A. STEIN: J. Chem. Phys. 18, 1296 (1950). — [5] FINKELNBURG, W. und S. M. SEGAL: Phys. Rev. 80, 258 (1950) und 83, 582 (1951). — [6] FINKELNBURG, W. und J. P. LATIL: J. Opt. Soc. Am. 44, 1 (1954). — [7] FINKELNBURG, W.: Illuminating Engineering 45, 625 (1950). — [8] GRETENER, E.: J. Soc. Mot. Pict. Eng. 61, 516 (1953). — [9] GREIDER, C. E.: ebenda 61, 525 (1953).

Prof. Dr. WOLFGANG FINKELNBURG, Erlangen,
Forschungslaboratorium der Siemens-Schuckertwerke.

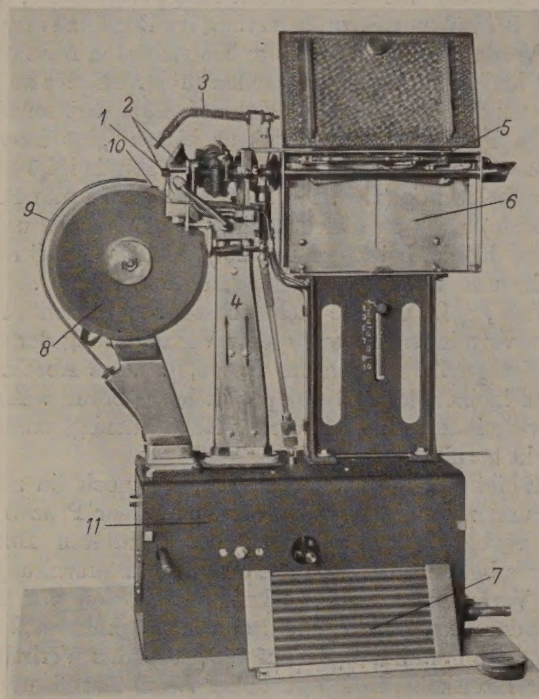


Abb. 1. Vollautomatische Beckbogen-Höchstleistungslampe.
1 Spitze der Positivkohle; 2 Wassergekühlte Metallbacken; 3 Sonde zur automatischen Regulierung des Positivkohle-Vorschubes; 4 Zu- und Abfluß des Kühlwassers; 5 Mechanismus zum Aneinanderfügen der Positivkohlen; 6 Raum für das während des Betriebes auswechselbare Magazin 7 mit zehn 25 cm-Positivkohlen; 8 Negative Graphitscheibe; 9 Sonde zur automatischen Regulierung der Rotation von 8; 10 Spitze der Zündelektrode und Fußpunkt des brennenden Bogens auf der Scheibe; 11 Kasten mit Antriebsmotor, Relais und Schaltern.

Kohle zwar den Abbrand stark herabsetzen, doch ist erfahrungsgemäß die Stabilität und Lichtruhe eines Beckbogens um so größer, je kleiner der Durchmesser der Negativkohle ist. NOFFSINGER und der Verfasser haben deshalb in den Engineer Research and Development Laboratories in Fort Belvoir, Virginia, USA die bisher üblichen Beckbogenlampen in zweifacher Beziehung zu ändern versucht, und damit die Möglichkeit für einen vollautomatischen, ununterbrochenen vielstündigen Betrieb auch bei sehr hoher Leuchtdichte erwiesen. Es wurde nämlich einerseits die dünne Negativkohle gemäß Abb. 1 durch eine dünne Graphitkreisscheibe ersetzt, auf deren Rand der negative Fußpunkt des Bogens entlang wandert, und die nun erst nach vielstündigem Betrieb ausgewechselt werden muß. Zweitens wurde für die Positivkohle ein Magazin vorgesehen, in dessen einfachster Ausführung gemäß Abb. 1 die 25 cm langen Kohlen im Lampen-